

Tentamen i Envariabelanalys 2

2022-10-19 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast kl 21.00 på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' + \frac{4x^3}{1+x^4}y = 5$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 2$.

2. (a) Ange en formel för volymen till den kropp som uppstår då området

$$1 \leq x \leq 3, \quad 2 \leq y \leq 1 + e^x$$

roteras ett varv runt $x = -1$ (volymen ska inte beräknas). För poäng krävs en principskiss som motiverar formeln. (1p)

- (b) Beräkna längden av parameterkurvan som ges av

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t^3/3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(Korrekt formel är värd 1p.) (2p)

3. (a) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \arctan(x) - 1}{x^2}$.

(b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\ln(1+x) - \sin(x)}$.

- (c) Avgör om $f(x) = \sin(x^2) + 2\cos(x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

4. (a) Avgör för vilka reella x som $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k + \sqrt{k}}$ konvergerar.

(b) Avgör om $\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(x)}{x^2 \sqrt{x}} dx$ är konvergent.

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y^{(4)} - 6y''' + 13y'' = 78x - 10 + 36 \cos(2x) + 48 \sin(2x).$$

VÄND!

6. Låt $f(x) = \sqrt[3]{1+3x}$.

(a) Bestäm Maclaurinutvecklingen till $f(x)$ av ordning 2 med restterm på Lagranges form (ordning 3). (1p)

(b) Bestäm ett rationellt tal p/q (där p, q är heltal) sådant att

$$\left| f(-1/10) - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{100}.$$

(2p)

7. Avgör för vilka reella p som

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)(\ln(\ln k))^p}$$

konvergerar.