

Tentamen i Envariabelanalys 2

2024-08-29 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTR n godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\arctan x - x}.$$

- (b) Avgör om

$$f(x) = 6e^x - 3 \ln(1 + x^2) - 6x - x^3$$

har lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

- (c) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} - \sqrt{x^4 + x^2} \right).$$

2. (a) (**Endast svar på (a)**) Lös differentialekvationen

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1, \quad y(1) = 0. \quad (1p)$$

- (b) Bestäm en lösning till integralekvationen

$$y(x) = \int_2^x (y(t))^2 dt + 1$$

och ange största öppna intervall där $y(x)$ är en lösning. (2p)

Var god vänd!

3. (a) Bestäm konvergensradien R till potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 x^{2k}}{2^k + k^2}$.

(OBS! Ändpunkterna $x = \pm R$ ska alltså ej undersökas.)

- (b) Avgör konvergens: $\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x \arctan x} dx$.

- (c) Serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$$

är konvergent enligt Leibniz kriterium (behöver ej visas). Om vi approximerar seriens summa med en delsumma med n termer, bestäm ett n sådant att felets belopp blir högst $1/1000$.

4. (a) Kurvan Γ ges i polära koordinater av

$$r(\varphi) = \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

Beräkna längden av Γ . (1p)

- (b) Området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 3\}$$

roteras ett varv kring linjen $x = -2$. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen. (2p)

För full poäng på (b) krävs en figur som förklarar varför din integral blir som den blir.

Del B

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$\left| \int_0^x e^{-t^2} dt - p(x) \right| \leq \frac{1}{5000}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

6. Beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)}$.