Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2025-03-21 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTRn godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 2, med restterm i Lagranges form (av ordning 3), till
$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$
Visa sedan med hjälp av denna utveckling att
$$\left|\sqrt{\frac{4}{5}} - \frac{179}{200}\right| \le \frac{1}{1000}. \qquad (2p)$$
(b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x^2 + 2\ln(1-x^2)}{e^{-2x^2} - \cos 2x}$. (1p)

2. (a) Bestäm $f(x)$ så att $y = (1+x^2)/3$ är en lösning till differentialekvationen
$$y' + f(x)y = x$$
och ange därefter den lösning till ekvationen som uppfyller $y(0) = 0$. (2p)
(b) Ange samtliga lösningar (endast svar på 2b, inga uträkningar) till differentialekvationen
$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0. \qquad (1p)$$

Var god vänd!

3. (a) Bestäm konvergensradien R för potensserien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k + k^2}$.

   (OBS! Ändpunkterna $\pm R$ ska alltså ej undersökas.)

   (b) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan x}{\sin^2 x}\, dx$.

   (c) Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \frac{3}{2}$.

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av kurvan

$$\begin{cases} x(t) = t^2, \\ y(t) = \mathrm{e}^{2t}, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

(1p)

   (b) Området

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2x}{\pi} \leq y \leq \sin x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

   roteras ett varv kring linjen $x = \pi/2$. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen. (2p)

   För full poäng på (b) krävs en figur som förklarar varför din integral blir som den blir.

Del B

5. Bestäm en lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$\frac{y'}{x+1} = \frac{y^2 - 1}{2x}, \qquad y(1) = 0,$$

   samt ange största möjliga öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.

6. Bestäm rationella tal (alltså kvoter mellan heltal) $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sådana att

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

   och bestäm sedan en rationell approximation till integralen med ett fel vars absolutbelopp är högst $1/1000$. Approximationen får skrivas som en oförenklad summa av rationella tal.
