Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

# Tentamen i Envariabelanalys 2

**2025-06-05 kl 08.00–13.00**

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift $n$ eller – men inte för överbetyg – KTR$n$ godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända.

**Notera:** Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

---

## Del A

1. (a) Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 kring $x = \pi/3$ för
$$f(x) = \cos x$$
med restterm i ordoform (av ordning 3).

   (b) Avgör om
$$f(x) = x + 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{1+x^2} - 3\ln(1+x)$$
har lokalt extremvärde i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

   (c) Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \arctan x}{x^2 \sin x}.$$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen
$$y''' + 3y'' - 4y = 9\mathrm{e}^x + 8 - 4x.$$

**Var god vänd!**

3. (a) Bestäm alla reella $x$ sådana att potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{k^2 \cdot 8^k}$$

är konvergent. (2p)

(b) Visa att $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + x^2}\, dx \leq 1.$ (1p)

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, arean som uppstår då kurvan

$$y = 2 + \ln x, \quad \frac{1}{\mathrm{e}^2} \leq x \leq \mathrm{e},$$

roteras ett varv kring linjen $x = -1$. (1p)

(b) Området

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq \mathrm{e}^x,\ 0 \leq x \leq 1\right\}$$

roteras ett varv kring linjen $y = -1$. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen. (2p)

För full poäng på både (a) och (b) krävs figurer som förklarar varför dina integraler blir som de blir.

---

## Del B

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$\left|\ln(1 + x^2) - p(x)\right| \leq \frac{1}{5000}, \qquad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

6. Bestäm en potensserie som löser differentialekvationen

$$xy'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Bestäm också potensseriens konvergensradie, samt visa att

$$\left|y(x)\right| \leq \mathrm{e}^{|x|}.$$

---