

Tentamen i Envariabelanalys 2

2026-01-08 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTR n godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Avgör om

$$f(x) = (\arctan x)^2 - e^{x^2}$$

har lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

- (b) Undersök

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

- (c) Bestäm Maclaurinutvecklingen av funktionen

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$$

med rest $\mathcal{O}(x^4)$.

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''' + y'' + 3y' - 5y = e^{-x} - 20 \sin x.$$

Var god vänd!

3. (a) Avgör konvergens:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k^2)}{\cos(1/k)}. \quad (1p)$$

- (b) Betrakta integralen

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+x^3}} dx.$$

$$\text{Visa att } |I| \leq 4. \quad (2p)$$

4. (a) Området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 9 - x^2 \text{ och } y \geq 5x - 5\}$$

roteras ett varv kring $y = -1$. Skriv volymen av den uppkomna rotationskroppen med hjälp av integraler (som ej skall beräknas). (2p)

- (b) Kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ roteras ett varv runt linjen $x = -3$. Ange arean av den uppkomna rotationsytan som en integral (som ej skall beräknas). (1p)

För full poäng krävs **tydliga** figurer som förklarar varför dina integraler blir som de blir.

Del B

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|x \cos(x^2) - p(x)| \leq 10^{-6} \quad \text{då } |x| \leq 1/2.$$

6. Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, \quad y(-e^\pi) = e^\pi,$$

och ange största möjliga öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.

Ledning: Låt $z = y/x$.
