Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Exempeltentamen 1 (av 4) i Envariabelanalys 2

2023-??-?? kl ??.00–??.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3p var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast xxxxx på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x-\arctan x}$. (1p)

   (b) Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 till funktionen $f(x)=\sin x$, med restterm i Lagranges form (ordning 5). Visa också att

$$\left|\sin\left(\frac{1}{10}\right)-\frac{599}{6000}\right|\leq 10^{-7}.$$

   (2p)

2. (a) (Endast svar + redovisad kontroll av att ditt svar är korrekt på (a)) Lös differentialekvationen

$$xy'-y=x^2\mathrm{e}^{2x},\quad x>0,\qquad \text{med bivillkoret } y(1)=0.$$

   (1p)

   (b) Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$y'-xy^3=0,\quad y(0)=-1,$$

   och ange största öppna intervall där $y(x)$ är en lösning. (2p)

3. (a) Avgör för vilka reella x som potensserien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)x^{2k}}{4^k(k+3)}$ konvergerar. (2p)

   (b) Visa att $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}\leq 3.$ (1p)

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av kurvan

$$y = x^2/2 + 3, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

(1p)

(b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade område som avgränsas av parabeln $y = 2 - x^2$ och linjen $y = -x$ roterar ett varv kring linjen $y = -3$.

Inkludera en principskiss som motiverar formeln som används. (2p)

Del B

5. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 4 med restterm i ordoform (ordning 5) till

$$f(x) = \ln(1 + \sin x) + \mathrm{e}^{x^2} - x\sqrt{1 + x},$$

och avgör om f har lokalt extremvärde i $x = 0$; ange i så fall också vilken typ. Beräkna slutligen $f^{(4)}(0)$.

6. Bestäm rationella tal (alltså kvoter mellan heltal) $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sådana att

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

och bestäm sedan en rationell approximation till integralen med ett fel vars absolutbelopp är högst $1/1000$. Approximationen får skrivas som en oförenklad summa av rationella tal.
