Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Exempeltentamen 2 (av 4) i Envariabelanalys 2

2023-??-?? kl ??.00–??.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3p var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast xxxxx på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till funktionen $f(x) = \ln(1 + x)$, med restterm i Lagranges form (ordning 4).

   (b) Beräkna
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \mathrm{e}^{-x^2/4}}{x^4}.$$

   (c) Avgör om $f(x) = 2 + x\sin(x^3) - x^3 \arctan(x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

2. (a) Bestäm den allmänna lösningen till
   $$y'' - y' - 2y = 2x + 5.$$ (1p)

   (b) Lös integralekvationen $3y(x) - \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{y^2(t)}\,dt = 6.$ (2p)

3. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2x^2 + \sin x}\,dx.$

   (b) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k}}.$

   (c) Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k^2} \le 1.$

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, volymen som uppstår då området

$$D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 + x^3,\ -1 \leq x \leq 1\}$$

roterar ett varv kring linjen $x = 2$. Inkludera en principskiss som motiverar formeln. (1p)

(b) Beräkna arean av det område som i polära koordinater ges av olikheterna $0 \leq r \leq \varphi^2 + \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. (2p)

Del B

5. Låt $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ lösa

$$x^2 y'' - 2xy' + (4x^2 + 2)y = 0, \quad y'(0) = 1,\ y''(0) = -2.$$

Bestäm koefficienterna $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ samt bestäm potensseriens konvergensradie R.

6. Avgör om $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ är konvergent.
