Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Exempeltentamen 3 (av 4) i Envariabelanalys 2

2023-??-?? kl ??.00–??.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3p var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast xxxxx på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Avgör om
$$f(x) = \cos x + \sqrt{1+x^2}$$
har lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

   (b) Undersök $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \left(\arctan\dfrac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{x}\right)$.

   (c) Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 kring $x = 4$ till funktionen
$$f(x) = \sqrt{x}$$
med restterm i ordoform (ordning 3).

2. (a) Lös integralekvationen
$$y(x) + \int_0^x y(t)\,dt = 3. \qquad \text{(1p)}$$

   (b) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen
$$y''' + y'' + 3y' - 5y = 20\cos x. \qquad \text{(2p)}$$

3. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-1}$.

   (b) Visa att $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + e^x} \leq 2$.

(c) (Endast svar på (c)) Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är divergent, vad är då *med nödvändighet* sant?

(i) $a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \to \infty$ då $n \to \infty$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av kurvan som i polära koordinater ges av

$$r = \sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2. \tag{1p}$$

(b) Beräkna arean av den yta som uppstår när kurvan

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

roterar ett varv kring linjen $x = 2$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används. (2p)

Del B

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$\left|\ln(1+x) - p(x)\right| < \frac{1}{300}, \qquad |x| \le \frac{1}{4}.$$

6. Visa att

$$y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} x^{2k}$$

löser differentialekvationen

$$(1+x^2)y' - 2xy = 2x^3, \qquad -1 < x < 1.$$

Uttryck sedan y med elementära funktioner genom att lösa differentialekvationen.
