Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Exempeltentamen 4 (av 4) i Envariabelanalys 2

2023-??-?? kl ??.00–??.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3p var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast xxxxx på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Undersök $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{x^3}$.

   (b) Bestäm största heltal n sådant att

   $$\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}((x + x^3)^2) = \mathcal{O}(x^n).$$

   (c) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 2 till funktionen

   $$f(x) = \cos(2x),$$

   med restterm i Lagranges form (ordning 3).

2. (a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

   $$y^{(4)} + 4y'' = 0. \qquad \text{(1p)}$$

   (b) Bestäm en lösning till differentialekvationen

   $$y'(x) - 2e^{-y}x = -2e^{-y}, \quad y(0) = 0 \qquad \text{(2p)}$$

   och ange största öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.

3. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{2x}}{3x+x^4}\,dx.$

   (b) Visa att $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq 5/12.$

   (c) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k}.$

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av parameterkurvan

$$x(t) = t^2,\ y(t) = e^t,\ 1 \leq t \leq 3. \qquad \text{(1p)}$$

   (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området givet av $1 \leq y \leq \mathrm{e}^x$, $0 \leq x \leq 2$, roterar ett varv kring linjen $x = -1$. Inkludera en principskiss som motiverar formeln. (2p)

Del B

5. Visa att

$$1 \leq \int_0^{\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x+x^4}\,dx \leq 5.$$

6. Bestäm alla värden på parametrarna a och b sådana att gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2} - \sqrt{x^2+bx-1}\right)$$

existerar ändligt, och beräkna gränsvärdet för dessa värden.
