

Exempel 1

Lös $xy' - 2y = x^3 \cos x$, $y(\pi) = \pi^3$, $x > 0$.

Lösning: Ekvationen är en linjär av 1:a ordningen så vi löser med hjälp av Integrerande Faktor.

$$xy' - 2y = x^3 \cos x \iff y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x$$
$$\int -\frac{2}{x} dx = -2 \ln x = \ln \frac{1}{x^2} \implies I.F. = e^{\ln(1/x^2)} = \frac{1}{x^2}.$$

Multiplikation av ekvationen med den Integrerande Faktorn ger då

$$\frac{1}{x^2} \left(y' - \frac{2}{x}y \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2}y \right) = \frac{1}{x^2} \cdot x^2 \cos x = \underline{\underline{\cos x}} \iff$$
$$\iff \frac{1}{x^2}y = \int \cos x dx = \sin x + C \iff y = x^2(\sin x + C)$$
$$y(\pi) = \pi^2(\sin \pi + C) = \pi^2 C = \pi^3 \iff C = \pi \implies$$
$$\implies y = x^2(\pi + \sin x)$$