Exempel 2

Bestäm $g(x)$ så att $y = x^3$ blir en lösning till ekvationen

$$y' + g(x)y = x^2, \quad x > 0.$$

Bestäm därefter den lösning till ekvationen för vilken gäller att $y(1) = 0$.
Lösning: Insättning av $y = x^3$ i ekvationen ger

$$3x^2 + g(x)x^3 = x^2 \iff g(x) = \frac{x^2 - 3x^2}{x^3} = -\frac{2}{x}.$$

Exempel 2

Ekvationen blir således

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2, \quad x > 0$$

och vi får

$$-\int \frac{2}{x}dx = -2\ln x = \ln\frac{1}{x^2} \Longrightarrow I.F. = e^{\ln(1/x^2)} = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \frac{1}{x^2}\cdot x^2 = 1 \iff \frac{1}{x^2}y = x + C \iff$$
$$y = x^2(x + C) = x^3 + Cx^2, \quad y(1) = 1 + C = 0 \iff$$
$$C = -1 \Longrightarrow y = x^3 - x^2, \quad x > 0.$$

Exempel 2

Observera att även om vi inte hade haft det från början givet, så hade vi varit tvungna att välja $x > 0$ som definitionsmängd, trots att $x^3 - x^2$ är definierat för alla $x \in \mathbb{R}$. Detta är en konsekvens av vårt lösningsbegrepp; en lösing måste vara definierad på ett intervall där den uppfyller ekvationen och är kontinuerligt deriverbar så många gånger som ekvationen kräver. Då ekvationen inte kan vara uppfylld på ett intervall som innehåller $x = 0$ så måste vi välja sida. Vilken sida det blir bestäms av bivillkoret. Lösningen skall ju vara definierad i $x = 1$ och följaktligen blir definitionsmängden för lösningen $x > 0$.