

Exempel 8

Beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k + \sin(k\pi/2)}{3^k}$.

Lösning: Vi delar upp serien i två delar. Under förutsättningen att vi visar att dessa är konvergenta så är det tillåtet. Alltså,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k + \sin(k\pi/2)}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{3^k}.$$

Vi börjar med den andra serien och skriver ut några termer.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{3^k} &= \frac{\sin(\pi/2)}{3} + \frac{\sin(\pi)}{3^2} + \frac{\sin(3\pi/2)}{3^3} + \frac{\sin(2\pi)}{3^4} + \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \dots \end{aligned}$$

och vi ser att $\sin(k\pi/2) = 0$ om k är jämnt och $\sin((2l+1)\pi/2) = (-1)^l$ för heltal $l \geq 1$.

1/3

Exempel 8

Detta gör att den andra serien kan skrivas

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{3^k} &= \left[k = 2l + 1 \right] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{3^{2l+1}} = \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{9} \right)^l = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{geometrisk} \\ \text{kvot} = -1/9 \end{array} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + 1/9} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

För att hantera den första serien sätter vi $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$.

Konvergensraden är $R = 1$ (varför?) och för $|x| < 1$ gäller att

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kx^k &= x \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (x^k) = x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\ &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

2/3

Exempel 8

Med $x = \frac{1}{3}$ erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \frac{1/3}{(1 - 1/3)^2} = \frac{3}{4}.$$

Eftersom båda serierna är konvergenta gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k + \sin(k\pi/2)}{3^k} = \frac{3}{4} + \frac{3}{10} = \frac{21}{20}.$$

3/3