

## Exempel 3, entydighet hos maclaurinutveckling

Antag att  $f(x)$  uppfyller olikheten

$$|f(x) - x^2 e^{\sin x}| \leq \sin(x^6) \quad \text{då} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Bestäm Maclaurinutvecklingen till  $f(x)$  av ordning 5 med restterm på ordoform.

**Lösning:** Enligt Maclaurins formel kan vi skriva

$$x^2 e^{\sin x} = p(x) + \mathcal{O}(x^6)$$

där  $p(x)$  är Maclaurinpolynomet av ordning 5. Notera att  $\sin(x^6) = \mathcal{O}(x^6)$  så förutsättningarna ger

$$f(x) = x^2 e^{\sin x} + \mathcal{O}(x^6) = p(x) + \mathcal{O}(x^6),$$

d v s  $p(x)$  approximerar  $f$  lika bra som Maclaurinpolynomet. Följaktligen, enligt entydighetsatsen är  $p(x)$  Maclaurinpolynomet av ordning 5 till  $f$ .

1 / 4

## Exempel 3, entydighet hos maclaurinutveckling

P.g.a. faktorn  $x^2$  och att  $\sin x \approx x$  skall vi Maclaurinutveckla  $e^{\sin x}$  till ordning 3 med rest  $\mathcal{O}(t^4)$ . Vi får

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^4),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5),$$

$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} =$$

$$= 1 + \left( x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \right) + \frac{\left( x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \right)^2}{2} + \frac{\left( x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \right)^3}{6} + \mathcal{O} \left( \left( x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \right)^4 \right).$$

2 / 4

## Exempel 3, entydighet hos maclaurinutveckling

Vi börjar bakifrån med ordo-termen.

$$\mathcal{O} \left( \left( x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \right)^4 \right) = \mathcal{O} \left( x^4 \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4) \right)^4 \right) = \mathcal{O}(x^4)$$

Följaktligen, alla termer av grad 4 och högre går in i  $\mathcal{O}(x^4)$

$$\left( x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \right)^2 = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\left( x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \right)^3 = x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (\text{egentligen } \mathcal{O}(x^5))$$

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

3 / 4

## Exempel 3, entydighet hos maclaurinutveckling

Detta ger

$$x^2 e^{\sin x} = x^2 \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \right) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$$

vilket ger att

$$f(x) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$$

är Maclaurinutvecklingen av  $f$  av ordning 5 även om Maclaurinpolynomet av ordning 5 har grad 4.

OBS!! Detta resonemang visar INTE att  $f(x) = x^2 e^{\sin x}$ !! Om så varit fallet skulle ju  $|f(x) - x^2 e^{\sin x}| = 0$  och inte  $\leq \sin(x^6)$ .

4 / 4