

## Exempel 5

Låt  $D_n = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^n \leq y \leq 1\}$ , där  $n = 1, 2, 3, \dots$

Bestäm tyngdpunkten  $((x_t)_n, (y_t)_n)$  för  $D_n$  och undersök

$\lim_{n \rightarrow \infty} ((x_t)_n, (y_t)_n)$ .

**Lösning:** De olika områdena  $D_n$  uppfyller att

$$D_n \subset D_{n+1} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = E,$$

den så kallade *enhetskvadraten*. Då  $n \rightarrow \infty$  så kommer  $D_n$  att närma sig  $E$ , så rimligen bör vi få att tyngdpunkten för  $D_n$

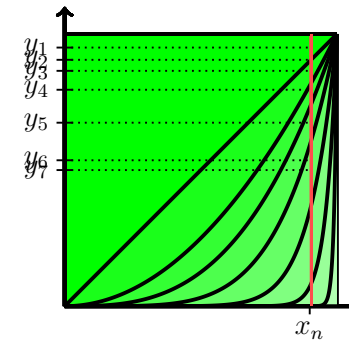
kommer att närma sig  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  då  $n \rightarrow \infty$ .

I hanteringen av masselementet bortser vi från densiteten då den ändå kommer att divideras bort i beräkningen av tyngdpunkten, dvs  $dm_n = dA_n$ .

1/4

## Exempel 5

Sekvensen  $D_n$  av områden ser ut enligt nedan. För  $n = 1$  är området triangeln ovanför linjen  $y = x$  och för " $n = \infty$ " är området hela enhetskvadraten. Låt  $(x_n, y_n)$  vara tyngdpunkten för *remsan*. Den rödfärgade remsan symboliserar masselementet  $dm_n$  för området  $D_n$ .



2/4

## Exempel 5

Vi får

$$\begin{aligned} A(D_n) &= \int_0^1 (\text{övre} - \text{undre}) dx = \int_0^1 (1 - x^n) dx = \left[ x - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = m_n, \\ (x_t)_n &= \frac{1}{m_n} \int_0^1 x dm_n = \frac{1}{m_n} \int_0^1 x(1 - x^n) dx = \frac{1}{m_n} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{m_n} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{m_n} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{2(n+2)} = \\ &= \frac{n+1}{2(n+2)} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

då  $n \rightarrow \infty$ .

3/4

## Exempel 5

I beräkningen av  $(y_t)_n$  är det viktigt att komma ihåg att  $y$ :et är  $y$ -koordinaten för *remsans tyngdpunkt*, dvs

$$\begin{aligned} y &= x^n + \frac{1 - x^n}{2} = \frac{1 + x^n}{2}, \\ (y_t)_n &= \frac{1}{m_n} \int_0^1 y dm_n = \frac{1}{m_n} \int_0^1 \frac{1 + x^n}{2} (1 - x^n) dx = \\ &= \left[ \text{konjugat-} \right] = \frac{1}{2m_n} \int_0^1 (1 - x^{2n}) dx = \\ &= \frac{1}{2m_n} \left[ x - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2m_n} \left[ 1 - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \\ &= \frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

då  $n \rightarrow \infty$ , dvs  $((x_t)_n, (y_t)_n) = \left( \frac{n+1}{2(n+2)}, \frac{n+1}{2n+1} \right) \rightarrow \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ .

4/4