

# Envariabelanalys, del 2

Tomas Sjödin

## Innehåll

<b>0</b>	<b>Förkunskaper och beteckningar</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Föreläsning 1–3: Taylor- och Maclaurinutvecklingar</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Föreläsning 5–7: Differentialekvationer</b>	<b>6</b>
2.1	Första ordningens . . . . .	6
2.2	Komplexvärda funktioner . . . . .	6
2.3	Andra ordningens linjära med konstanta koefficienter . . . . .	7
2.4	Högre ordnings linjära med konstanta koefficienter, differentialoperatorer och förskjutningsregeln . . . . .	9
2.5	Partikuläransatser . . . . .	10
2.6	Mer diffekvationer . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Föreläsning 9–10: Generaliserade integraler och numeriska serier</b>	<b>11</b>
3.1	Generaliserade integraler . . . . .	11
3.2	Numeriska serier . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Föreläsning 11: Potensserier</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Föreläsning 12: Potensserielösningar av differentialekvationer, Maclaurinserier</b>	<b>16</b>
5.1	Maclaurinserier . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Föreläsning 14: Kurvlängd, plan area och volym</b>	<b>18</b>
6.1	Riemannsammor* . . . . .	18
6.2	Parameterkurvor . . . . .	19
6.3	Area av plana områden . . . . .	20
6.4	Volym via integration av tvärsnittsareor . . . . .	20
6.5	Rotationsvolym . . . . .	20
6.6	Polära koordinater . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Föreläsning 15: Rotationsarea, tyngdpunkter och Guldins regler</b>	<b>23</b>
7.1	Area hos rotationsytor . . . . .	23
7.2	Tyngdpunkter . . . . .	24

*Detta är tänkt att vara en sammanfattning av det jag anser vara den viktigaste teorin i kursen. Inga exempel ges, och det är inte alls tänkt att på något vis vara ett substitut för kursboken. Även om jag försökt så gott som möjligt att korrekturläsa materialet kan det givetvis finnas typografiska fel eller andra otydligheter i detta häfte (om ni hittar några är jag tacksam om ni säger till)!*

## 0 Förkunskaper och beteckningar

Främst behöver man kunna räkna med derivator och integraler (så om ord som kedjeregeln, produktregeln, primitiv funktion, partiell integration eller variabelbyten inte känns bekanta är det läge att repetera envariabel 1). Nu ska vi bara "repetera" lite notation. Främst kommer vi jobba i  $\mathbb{R}$ , men de sista kapitlen vi ska tala om handlar mycket om mängder i  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$ , så därför är jag här lite allmännare än vi varit tidigare.

En mängd  $M \subset \mathbb{R}^n$  är en väldefinierad samling punkter (element) i  $\mathbb{R}^n$ . Om  $M_1, M_2$  är mängder i  $\mathbb{R}^n$  så definierar vi:

- $M_1 \subset M_2$ : " $M_1$  är en delmängd till  $M_2$ ", om varje punkt i  $M_1$  också ligger i  $M_2$ ,
- $M_1 \cap M_2$ : " $M_1$  snitt  $M_2$ ", mängden av punkter som ligger i både  $M_1$  och  $M_2$ ,
- $M_1 \cup M_2$ : " $M_1$  union  $M_2$ ", mängden av punkter som ligger i minst ett av  $M_1$  eller  $M_2$ ,
- $M_1 \setminus M_2$ : " $M_1$  minus  $M_2$ ", mängden av punkter som ligger i  $M_1$  men inte i  $M_2$ .

Vi skriver också

$$y \in M : y \text{ tillhör } M, \text{ eller } y \text{ är en punkt i } M.$$

(Observera att  $\mathbb{R}^n$  själv är en mängd). Kanske rätt självklart, men två mängder sägs vara lika om de innehåller samma element. Den tomma mängden är mängden som inte har några element alls, och betecknas  $\emptyset$ . Ibland har man flera mängder  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , och då skriver vi också:

$$\bigcup_{j=1}^k M_j = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k, \quad \bigcap_{j=1}^k M_j = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k.$$

Ofta betecknas mängder på följande sätt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x)\} = \{x : P(x)\},$$

som står för mängden av de  $x$  i  $\mathbb{R}^n$  som uppfyller villkoret  $P(x)$  (det senare skrivsättet används då dimensionen är underförstådd). T.ex.  $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$  är helt enkelt enhetscirkeln i planet, och  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ . Om en mängd är ändlig skriver man ofta också

$$\{x_1, x_2, \dots, x_k\},$$

där  $x_i$  :a är elementen i mängden.

**Funktioner:** En funktion  $f$  från en mängd  $M \subset \mathbb{R}^n$  till en mängd  $N \subset \mathbb{R}^m$  är en regel som för varje  $x \in M$  ger exakt ett värde  $f(x) \in N$ , vi skriver

$$f : M \rightarrow N.$$

$M$  kallas för **definitionsområdet** till  $f$ , och betecknas även  $D_f$ . OBS! Om vi får ett funktionsuttryck och  $D_f$  inte anges explicit är det underförstått att det är den största mängden där uttrycket är meningsfullt. Vi säger också att  $f$  är av **typ**  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  när vi inte orkar ange  $D_f$  explicit. I nästan alla fall kommer vi ta  $N = \mathbb{R}^m$ , för oftast spelar det ingen roll om vi gör denna mängd lite större. Följande begrepp är också användbara ibland.

En funktion  $f : M \rightarrow N$  som ovan sägs vara:

- **injektiv** om det för varje par  $a, b \in M$ ,  $a \neq b$  gäller att  $f(a) \neq f(b)$ .
- **surjektiv** om det för varje  $y \in N$  finns (minst) ett  $x \in M$  med  $y = f(x)$ .
- **bijektiv** om den är både injektiv och surjektiv.

**Värdemängden**  $V_f$  till  $f$  är mängden av alla punkter  $y \in \mathbb{R}^m$  sådana att det finns  $x \in D_f$  med  $y = f(x)$ .

# 1 Föreläsning 1–3: Taylor- och Maclaurinutvecklingar

Nedan är funktionen  $f(x)$  definierad i någon omgivning till punkten  $a \in \mathbb{R}$ , och dessutom har den kontinuerliga derivator upp till och med ordning  $n + 1$ . Taylor- och Maclaurinutvecklingar handlar om att approximera en funktion  $f(x)$  med ett polynom  $p_n(x)$  nära någon fix punkt  $a$ . Det man är ute efter är att få differensen  $f(x) - p_n(x)$  att gå så fort som möjligt mot noll då vi går mot punkten  $a$ .

## Sats 1.1 (Taylorpolynom)

Det finns ett unikt polynom  $p_n(x)$  av grad högst  $n$  sådant att

$$p_n(a) = f(a), p'_n(a) = f'(a), \dots, p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Detta polynom kallas Taylorpolynomet av ordning  $n$  i punkten  $a$  till  $f$ , och ges av

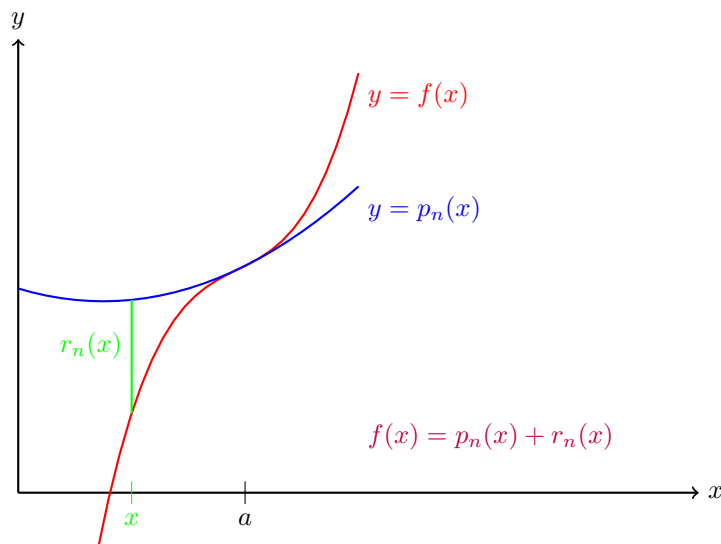
$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

där  $k! = k(k - 1)(k - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .

**Bevis:** Vi noterar att  $p_n(a) = f(a)$ ,  $p'_n(x) = f'(a) + 2\frac{f''(a)}{2}(x - a) + \dots + n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^{n-1}$ , så  $p'_n(a) = f'(a)$ . Fortsätter vi på samma sätt kommer vi slutligen fram till  $p_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$  så  $p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ .

Det är också lätt att se från ovanstående uträkning att det enda polynomet av grad högst  $n$  som kan uppfylla att alla de  $n$  första derivatorna är lika med motsvarande för  $f$  i  $a$  måste ges av formeln ovan. **V.S.B.**

Speciellt enkel blir formeln då  $a = 0$  (kallas då **Maclaurin-polynom**), och dessutom fås det allmänna fallet av detta via variabelbytet  $x - a = t$ . D.v.s. vi tittar på funktionen  $g(t) = f(a + t)$  och utvecklar denna i origo.



Funktionen

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

kallas  $n$ :e ordningens felterm/restterm, och mycket av teorin i denna del av kursen handlar om att uppskatta resttermen. Vi kommer i denna kurs jobba med två sätt att skriva resttermen.

- **Ordo-form:**  $r_n(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1}) = b(x)(x-a)^{n+1}$ , där  $b(x)$  är begränsad i någon omgivning till 0.
- **Lagrange:**  $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$  för något  $\xi$  mellan  $a$  och  $x$ .

Ordo-formen följer enkelt från Lagrange, eftersom  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$  är begränsad nära  $a$  ( $\xi$  beror på  $x$ , men ligger ju mellan  $a$  och  $x$  hela tiden).

**Bevis av Lagranges Restterm:**

Genom en translation kan vi utan förlust anta att  $a = 0$ . Vi inför nu en hjälpfunktion (där  $x$  nu är en fixerad punkt):

$$g(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{x^{n+1}}t^{n+1}.$$

Notera att

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0.$$

Speciellt gäller

$$g(0) = g(x) = 0,$$

så enligt medelvärdesatsen finns det nu en punkt  $t_1$  mellan 0 och  $x$  sådan att  $g'(t_1) = 0$ . Alltså gäller

$$g'(0) = g'(t_1) = 0,$$

och om vi återigen tillämpar medelvärdesatsen (på  $g'$ ) så finns en punkt  $t_2$  mellan 0 och  $t_1$  sådan att  $g''(t_2) = 0$ . Om vi fortsätter på detta sätt får vi tillslut en punkt  $\xi := t_{n+1}$  mellan 0 och  $x$  sådan att  $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ . Men vi noterar också att vi har

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) - p'_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{x^{n+1}}(n+1)t^n, \\ g''(t) &= f''(t) - p''_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{x^{n+1}}(n+1)nt^{n-1}, \\ &\vdots \\ g^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{x^{n+1}}(n+1)! \end{aligned}$$

där vi har använt att  $p_n^{(n+1)}(t) = 0$  då  $p_n$  har grad högst  $n$ . Alltså får vi (eftersom  $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ )

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x) - p_n(x)}{x^{n+1}}(n+1)!,$$

eller med andra ord

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

**V.S.B.**

Slutligen har vi den s.k. entydighetssatsen som är mycket viktig vid beräkningar av MacLaurinpolynom till sammansatta funktioner.

**Sats 1.2 (Entydighetssats)**

Om  $q(x)$  är ett polynom av högst grad  $n$  sådant att  $f(x) - q(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$ , då är  $q(x) = p_n(x)$  (där  $p_n(x)$  betecknar Taylorpolynomet av ordning  $n$  till  $f(x)$  i  $a$ ).

**Bevis:** Vi kan utan förlust anta att  $a = 0$ . Om  $p_n(x)$  betecknar Maclaurinpolynomet till  $f(x)$  och vi sätter

$$p(x) = p_n(x) - q(x),$$

då är  $p(x)$  ett polynom av grad högst  $n$  sådant att

$$p(x) = (p_n(x) - f(x)) - (q(x) - f(x)) = \mathcal{O}(x^{n+1}).$$

Antag nu att  $p(x)$  inte är identiskt noll. Då kan vi skriva  $p(x)$  på formen

$$p(x) = c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \dots + c_n x^n,$$

där  $c_k \neq 0$ . Men nu gäller då

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x^k} = c_k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x^{n+1})}{x^k} = 0,$$

vilket ger motsägelse.

**V.S.B.**

**Ordokalkyl:** Antag att  $f(x), g(x)$  är funktioner definierade i en omgivning till punkten  $a$ . Om det i någon omgivning till  $a$  finns en begränsad funktion  $b(x)$  sådan att

$$f(x) = b(x)g(x)$$

gäller i denna omgivning, då säger vi att

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ då } x \rightarrow a.$$

Det vill säga i varje steg i en uträkning betecknar  $\mathcal{O}(g(x))$  en funktion på formen  $b(x)g(x)$  där  $b(x)$  är en begränsad funktion i någon omgivning till  $a$ . Poängen är att det i många problem inte spelar någon roll exakt vilken funktion  $b(x)$  är, utan bara att om t.ex.  $g(x)$  går mot noll då  $x$  går mot  $a$  så går upp till någon begränsad faktor  $\mathcal{O}(g(x))$  lika fort mot noll.

Oftast är det  $a = 0$  vi kommer vara intresserade av, och  $g(x) = x^k$  för något heltal  $k$  (men det finns undantag då vi jobbar med sammansatta funktioner). Om det är klart vilken punkt  $a$  som avses brukar man bara skriva  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ .

Dessa räkneregler är bland andra enkla att verifiera:

- $f(x) = \mathcal{O}(f(x))$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x)), g(x) = \mathcal{O}(h(x)) \Rightarrow f(x) = \mathcal{O}(h(x))$ ,
- Om  $b(x)$  är begränsad gäller  $\mathcal{O}(b(x)g(x)) = b(x)\mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(g(x))$ ,
- Om  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  så gäller  $\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(g(x))$ .

Notera att det sistnämnda betyder att vi i en uträkning bara behåller "den sämsta" ordotermen och kastar bort övriga. En stor varning när det gäller ordokalkyl är att likhetstecknet blir enkelriktat. T.ex. gäller  $\mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2)$  men  $\mathcal{O}(x^2) \neq \mathcal{O}(x^3)$ . Vi får alltså i en uträkning aldrig hoppa från något som är sämre till något som är bättre.

### Sats 1.3 (Elementära Maclaurinutvecklingar)

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}),\end{aligned}$$

där

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}, \dots$$

## 2 Föreläsning 5–7: Differentialekvationer

### 2.1 Första ordningens

**Linjära:**  $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$ .

Dessa löses genom att låta  $F(x)$  vara en primitiv funktion till  $f(x)$  så att

$$\frac{d}{dx}(e^{F(x)}y(x)) = e^{F(x)}y'(x) + f(x)e^{F(x)}y(x) = e^{F(x)}(y'(x) + f(x)y(x)) = g(x)e^{F(x)}.$$

D.v.s.  $y(x) = e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)} dx$ .

**Separabla:**  $g(y)y'(x) = h(x)$ .

Dessa löses genom att integrera bägge sidor:

$$\int g(y) dy = \int h(x) dx.$$

Detta ger  $G(y(x)) = H(x) + C$  ( $G' = g, H' = h$ ). Så om vi kan invertera  $G$  så fås  $y(x) = G^{-1}(H(x) + C)$ .

### 2.2 Komplexvärda funktioner

Vi ska här se på funktioner på formen

$$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dessa kan alltid (genom att sätta  $u = \operatorname{Re}(w)$ ,  $v = \operatorname{Im}(w)$ ) delas upp som

$$w = u + iv,$$

där  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Vi definierar nu

$$w'(x) = u'(x) + iv'(x), \quad \int w(x)dx = \int u(x)dx + i \int v(x)dx,$$

och det är rättfram att kontrollera att vanliga räknelagar som

$$\begin{aligned}(\alpha w(x))' &= \alpha w'(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\(w_1(x) + w_2(x))' &= w_1'(x) + w_2'(x), \\(w_1(x)w_2(x))' &= w_1'(x)w_2(x) + w_1(x)w_2'(x), \\(w(h(x)))' &= w'(h(x))h'(x), \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Motsvarande gäller även för integraler. Observera också att  $w'(x) = 0$  för alla  $x$  om och endast om  $w(x)$  är en (komplex) konstant, samt att vi har

$$w(x) - w(a) = \int_a^x w'(t)dt.$$

Den viktigaste komplexvärda funktionen för oss är den komplexa exponentialfunktionen:

$$e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} := e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)).$$

Denna uppfyller

$$\frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}.$$

Om vi nu vill lösa en linjär diffekvation med konstanta koefficienter på formen

$$y' - \alpha y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

då noterar vi att denna är ekvivalent med

$$e^{-\alpha x}(y' - \alpha y) = (e^{-\alpha x}y)' = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha x}y = C \Leftrightarrow y = Ce^{\alpha x} \quad (C \in \mathbb{C}).$$

### 2.3 Andra ordningens linjära med konstanta koefficienter

Dessa har formen

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Man delar upp detta problem i två delar. Först hittar vi den allmänna lösningen  $y_h$  till den **homogena ekvationen**:

$$y_h'' + ay_h' + by_h = 0.$$

Denna fås från att först hitta rötterna  $\alpha, \beta$  (som eventuellt är komplexa eller lika) till den **karaktäristiska ekvationen**:

$$p(r) = r^2 + ar + b = 0,$$

och den allmänna homogena lösningen ges då av:

$$y_h = \begin{cases} Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} & \alpha \neq \beta \\ (Ax + B)e^{\alpha x} & \alpha = \beta \end{cases}$$

Sedan hittar man **en** partikulärlösning  $y_p$ , vilket vi kommer göra via en kvalificerad ansats.

Det är också värt att notera att om vi har komplexa rötter  $\alpha, \beta$  då måste det gälla att  $\alpha$  är komplexkonjugat till  $\beta$  (eftersom konstanterna  $a, b$  i ekvationen är reella). Alltså är rötterna i detta fall på formen  $c \pm id$  och man kan då alternativt skriva den allmänna homogena lösningen på formen

$$y_h = Ae^{(c+id)x} + Be^{(c-id)x} = Ce^{cx} \cos(dx) + De^{cx} \sin(dx),$$

(det vill säga för varje  $A, B$  finns unika  $C, D$  så att likhet gäller och vice versa). Den senare formen är ofta att föredra då vi vill ha kontroll på vilka lösningar som är reellvärda (vilket precis är de lösningar med  $C, D$  reella ovan).

**Substitutionen  $y = ze^{kx}$ :** Detta är en mycket viktig substitution (i viss mening bygger hela teorin på denna). Notera att (även för komplexa  $k$ ) så är  $e^{kx}$  aldrig noll, så det är alltid ok att göra en sådan substitution, och vi kan alltid ta oss tillbaka via  $z = ye^{-kx}$ . En direkt uträkning ger nu

$$y' = (z' + kz)e^{kx}, \quad y'' = (z'' + 2kz' + k^2z)e^{kx}.$$

Om vi sätter in detta i den homogena ekvationen får vi

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (z'' + 2kz' + k^2z)e^{kx} + a(z' + kz)e^{kx} + bze^{kx} = \\ &= (z'' + (2k + a)z' + (k^2 + ak + b)z)e^{kx} = 0. \end{aligned}$$

Notera nu speciellt, att termen framför  $z$  är just  $p(k)$ , så om vi väljer  $k = \alpha$  att vara en av våra rötter till den karakteristiska ekvationen, då försvinner denna term. Om vi då tittar på ekvationen får vi kvar:

$$(z'' + (2\alpha + a)z')e^{\alpha x} = 0,$$

vilket är ekvivalent med

$$z'' + (2\alpha + a)z' = 0.$$

Men  $r^2 + ar + b = (r - \alpha)(r - \beta) = r^2 + (-\alpha - \beta)r + \alpha\beta$  ger nu  $a = -\alpha - \beta$ . Detta leder till ekvationen:

$$z'' + (\alpha - \beta)z' = 0.$$

Om  $\alpha = \beta$  står det helt enkelt  $z'' = 0$  som vi kan integrera upp och får den allmänna lösningen  $z = Ax + B$ , så  $y = (Ax + B)e^{\alpha x}$ . Om å andra sidan  $\alpha \neq \beta$  då får vi en första ordnings linjär ekvation för  $z'$ , d.v.s. vi multiplicerar med den integrerande faktorn  $e^{(\alpha-\beta)x}$  och får ekvationen

$$(e^{(\alpha-\beta)x} z')' = 0,$$

så  $z' = Ce^{(\beta-\alpha)x}$ , vilket efter en till integration ger  $z = Ce^{(\beta-\alpha)x}/(\beta - \alpha) + A$ . Om vi sätter  $B = C/(\beta - \alpha)$  får vi alltså

$$y = ze^{\alpha x} = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}.$$

Så detta visar speciellt påståendet om den allmänna homogena lösningen.

När det gäller den allmänna strukturen på lösningen beror den helt enkelt på att om vi har två lösningar  $y_1, y_2$ :

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = g(x), \quad y_2'' + ay_2' + by_2 = g(x),$$

då gäller

$$(y_1'' + ay_1' + by_1) - (y_2'' + ay_2' + by_2) = (y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) = g(x) - g(x) = 0,$$

d.v.s.  $y_1 - y_2$  löser den homogena ekvationen.



## 2.4 Högre ordnings linjära med konstanta koefficienter, differentialoperatorer och förskjutningsregeln

Vi kommer i denna sektion använda differentialoperatoren  $D$  som är sådan att

$$Dy = y', D^2y = D(Dy) = D(y') = y'' \dots$$

Även uttryck som  $(D - \beta)(D - \alpha) = D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta$  tolkas formellt (även komplexa  $\alpha, \beta$  är o.k.). Om vi går tillbaka till vår andra ordnings differentialekvation:

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

med

$$p(D) = D^2 + aD + b$$

kan vi då skriva vår ekvation som

$$p(D)y = g(x).$$

Notera att  $p(D)(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1p(D)y_1 + c_2p(D)y_2$  om  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , vilket säger att  $p(D)$  är en linjär avbildning (från t.ex. rummet av två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner till rummet av kontinuerliga funktioner...). Polynomekvationen  $p(r) = r^2 + ar + b = 0$  kallas, som vi sa ovan, den **karaktäristiska ekvationen**, och om denna har rötter  $\alpha, \beta$  (som eventuellt är lika eller komplexa, och i det senare fallet är rötterna komplex-konjugat till varandra då vi har reella koefficienter), då kan vi skriva

$$p(D) = (D - \alpha)(D - \beta).$$

För att lösa problemet såg vi att man först hittar den allmänna lösningen till motsvarande **homogena** ekvation  $p(D)y_h = 0$ , vilken är

$$y_h = \begin{cases} Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} & \alpha \neq \beta \\ (Ax + B)e^{\alpha x} & \alpha = \beta \end{cases}$$

Sedan hittar man en så kallad **partikulärlösning**  $y_p$  till  $p(D)y_p = g(x)$ . Den allmänna lösningen till ekvationen blir sedan  $y = y_h + y_p$ . För att hitta partikulärlösningen gör man en lämplig "kvalificerad" ansats på hur  $y_p$  ungefär borde se ut (med några parametrar) som man sedan substituerar in i ekvationen och löser.

Högre ordnings linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter behandlas väldigt analogt med andra ordningens. Om

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0,$$

är vår operator, så tittar vi på ekvationen

$$p(D)y = g(x).$$

Vi har följande resultat:

### Sats 2.1

Om  $p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \dots (r - r_k)^{m_k}$ , där  $r_i \neq r_j$  om  $i \neq j$ , så gäller att den allmänna lösningen till den homogena ekvationen  $p(D)y = 0$  ges av

$$y(x) = P_1(x)e^{r_1x} + P_2(x)e^{r_2x} + \dots + P_k(x)e^{r_kx},$$

där  $P_j : a$  är polynom av högst grad  $(m_j - 1)$ .

Precis som i fallet för andra ordningens ekvationer är den allmänna lösningen till  $p(D)y = g(x)$  på formen  $y = y_h + y_p$  där  $y_h$  är den allmänna homogenlösningen och  $y_p$  en partikulärlösning, vilket återigen följer i princip direkt från linjäriteten hos ekvationen.

### Sats 2.2 (Förskjutningsregeln)

$$p(D)(z(x)e^{kx}) = e^{kx}p(D+k)z(x).$$

Ovan menar vi alltså att på vänstersidan verkar  $p(D)$  på produkten  $z(x)e^{ax}$  och på högersidan verkar  $p(D+k)$  bara på  $z(x)$ .

**Bevis av försjutningsregeln:** Notera att vi kan skriva

$$p(D)(z(x)e^{kx}) = (D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n)(z(x)e^{kx}),$$

där  $r_i$ :a inte nödvändigtvis är olika. Om vi då bara visar att  $(D - r_i)(z(x)e^{kx}) = e^{kx}(D - r_i + k)z(x)$  så kan vi iterera detta resultat och får då det allmänna fallet. Men  $(D - r_i)(z(x)e^{kx}) = z'(x)e^{kx} + kz(x)e^{kx} - r_iz(x)e^{kx} = e^{kx}(D - r_i + k)z(x)$ , vilket visar påståendet. **V.S.B.**

## 2.5 Partikuläransatser

Om vi fått en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter:

$$p(D)y = y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + c_1y' + c_0y = g(x)$$

har vi ett mekaniskt sätt att hitta homogenlösningarna  $y_h$  enligt ovan. Precis som för problemet att hitta en primitiv funktion till en given funktion så är det långt ifrån alla funktioner  $g(x)$  ovan sådana att det finns en partikulärlösning som kan skrivas "på ändligt sätt" med hjälp av elementära funktioner. Vi kommer bara se på vissa olika typer av högerled och vilka ansatser som då är lämpliga. Idén är alltid att reducera problemet till att lösa ett linjärt ekvationssystem. Och ett allmänt tips är att inte vara rädda för att testa en ansats. Om man gör fel ansats leder det bara till att man antingen inte får ett linjärt ekvationssystem eller ett som saknar lösningar.

- $g(x)$  polynom av grad  $m$ : Om  $k$  är det minsta talet sådant att  $c_k \neq 0$  (om  $c_k = 0$  för alla  $k = 1, \dots, n-1$  sätter vi  $k = n$ ) då ansätter vi

$$y_p = a_mx^{m+k} + a_{m-1}x^{m+k-1} + \dots + a_0x^k.$$

- $g(x) = q(x)e^{kx}$ : Substituera  $y_p = z(x)e^{kx}$  och använd förskjutningsregeln för att bli av med  $e^{kx}$ -termen. Detta ger en ny ekvation för  $z$ :

$$p(D+k)z = q(x)$$

som vi förhoppningsvis kan hitta en partikulärlösning  $z_p$  till. Då blir  $y_p = z_pe^{kx}$ .

- Om  $g(x) = A \cos(kx)$  (alternativt  $g(x) = A \sin(kx)$ ) fungerar det oftast med ansatsen  $y_p = a \cos(kx) + b \sin(kx)$ . Notera dock att det kan hända att  $\cos(kx)$  är en homogenlösning och då fungerar detta ej.
- **Resonans:** De fall som är stökigast att hantera är fallet då  $g(x)$  på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen. Om  $g(x) = q(x)e^{kx}$  som ovan (där  $k$  eventuellt är komplext) då kan vi fortfarande substituera  $y_p = z(x)e^{kx}$  och använda förskjutningsregeln som tidigare. Detta fungerar bra även om  $e^{kx}$  råkar vara en homogenlösning. Men vi kan även råka ut för

detta om vi har t.ex.  $g(x) = q(x) \cos(kx)$  (alternativt  $q(x) \sin(kx)$ ). Vi kan dock skriva om detta till komplex form:  $\cos(kx) = \operatorname{Re} e^{ikx}$  ( $\sin(kx) = \operatorname{Im} e^{ikx}$ ). Om vi istället hittar en partikulärlösning  $w_p$  till ekvationen

$$p(D)w = q(x)e^{ikx},$$

då får vi en partikulärlösning via  $y_p = \operatorname{Re} w_p$  ( $y_p = \operatorname{Im} w_p$ ). Notera att detta dock bygger på att koefficienterna i  $p(D)$  är reella.

- **Linjäritet:** Om vi har ekvationen  $p(D)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x)$ , då kan vi hitta en partikulärlösning  $p(D)y_i = g_i(x)$  för varje  $i$  och sedan sätta  $y_p = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ .

## 2.6 Mer diffekvationer

Vi kommer förutom ovanstående också titta en del på några mer speciella diffekvationer (Bernoulli, Euler, Bessel...).

## 3 Föreläsning 9–10: Generaliserade integraler och numeriska serier

Generaliserade integraler och numeriska serier ligger ganska nära varandra i viss mening. I envariabel 1 räknade vi lite på generaliserade integraler, och kommer titta på några sådana exempel här också. Men till stor del kommer denna del av kursen snarare handla om att avgöra ifall en generaliserad integral eller numerisk serie konvergerar eller inte utan att räkna ut värdet explicit (vilket oftast är mycket svårt att göra, speciellt när det gäller serier).

### 3.1 Generaliserade integraler

Låt  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  nedan. Vi kommer för enkelhets skull anta nedan att  $f(x)$  och  $g(x)$  är kontinuerliga på det öppna intervallet  $]a, b[$ .

**Definition 3.1.** Om det gäller för  $c \in ]a, b[$  att båda gänsvärdena

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^c f(x) dx, \quad \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx$$

existerar (och är ändliga), då säger vi att  $f(x)$  är integrabel i generaliserad mening på  $]a, b[$ , och definierar

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx.$$

- Notera att definitionen inte beror på vilket  $c$  vi väljer.
- Notera att detta ger "rätt" värde ifall  $f(x)$  är integrabel i vanlig mening på  $]a, b[$ , så generaliserade integraler som vi definierat dem innefattar också vanliga integraler.
- Annan terminologi är också att om den generaliserade integralen  $\int_a^b f(x) dx$  existerar (med ändligt värde) så sägs den vara **konvergent**, och **divergent** ifall den inte gör det.

Det är naturligt att också införa begreppet att en integral  $\int_a^b f(x)dx$  är generaliserad i en punkt: Integralen  $\int_a^b f(x)dx$  sägs vara **generaliserad i  $a$**  ( $b$ ) om antingen  $a = -\infty$  ( $b = \infty$ ) och/eller  $f(x)$  är obegränsad i någon omgivning till  $a$  ( $b$ ). Om integralen bara är generaliserad i en ändpunkt behöver vi inte införa  $c$  (det vi gör i definitionen är att dela upp integralen i delar som var för sig bara är generaliserade i en punkt).

**Sats 3.2**

(a) Om integralen  $\int_a^b f(x)dx$  enbart är generaliserad i  $b$ , då gäller att den är konvergent med

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

om och endast om gränsvärdet i högerledet existerar (ändligt).

(b) Om integralen  $\int_a^b f(x)dx$  enbart är generaliserad i  $a$ , då gäller att den är konvergent med

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^b f(x)dx,$$

om och endast om gränsvärdet i högerledet existerar (ändligt).

Generaliserade (konvergenta) integraler är linjära:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ofta är det så att man bara vill veta om en generaliserad integral är konvergent eller ej, och speciellt enkelt blir då fallet att  $f(x) \geq 0$ , för då har vi alltid ett gränsvärde som eventuellt är  $+\infty$ . En viktig egenskap är då den s.k. jämförelseprincipen:

**Sats 3.3**

Om  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  och  $g(x)$  är generaliserat integrabel på  $]a, b[$  då gäller att även  $f(x)$  är generaliserat integrabel på  $]a, b[$  med

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Givetvis räcker det att vi i satsen ovan har  $f(x) \leq Cg(x)$  för någon konstant  $C$ , och vidare, om integralerna endast är generaliserade i  $b$  ( $a$ ) så räcker det att denna olikhet gäller för  $x$  nära  $b$  ( $a$ ). Detta kan testas med ett gränsvärde. Vi formulerar satsen nedan för fallet då integralerna båda bara är generaliserade i  $b$ , men motsvarande fall gäller givetvis då de bara är generaliserade i  $a$ .

**Sats 3.4**

Antag att  $f(x), g(x) \geq 0$  och att integralerna  $\int_a^b f(x)dx$  och  $\int_a^b g(x)dx$  båda bara är generaliserade i  $b$ . Om

$$0 < \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

då är antingen båda integralerna konvergenta eller divergenta.

Ett typiskt sätt att testa konvergens är via jämförelse med integraler som vi vet om de är konvergenta eller divergenta. Den vanligaste testfunktionstypen är  $1/x^\alpha$  för lämpligt  $\alpha$ , och vi har:

**Sats 3.5 (Jämförelseintegraler)**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \text{ är } \begin{cases} \text{konvergent om } \alpha < 1 \\ \text{divergent om } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \text{ är } \begin{cases} \text{konvergent om } \alpha > 1 \\ \text{divergent om } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

**Definition 3.6 (Absolutintegrabla funktioner).** Om  $|f(x)|$  är generaliserat integrabel på  $]a, b[$ , då sägs  $f(x)$  vara generaliserat absolutintegrabel.

**Sats 3.7 (Triangelolikheten)**

Om  $f(x)$  är generaliserat absolutintegrabel så är den även generaliserat integrabel, och vi har:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

**3.2 Numeriska serier**

Dessa är ganska analoga med teorin för generaliserade integraler på formen  $\int_1^\infty f(x)dx$  (som bara är generaliserade i  $\infty$ ) som vi kommer se. Kom ihåg att vi definierat (i envariabel 1) talföljder som funktioner  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , och vi har också definierat vad som menas med  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n)$ . Oftast skrivs dock  $s_n$  istället för  $s(n)$  när man jobbar med talföljder.

Oändliga serier är på formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

där  $a_k$  är en talföljd, och dessa ska representera en oändlig summa.

Man förknippar med en sådan de så kallade **partialsummorna**

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

och man säger att serien är **konvergent med summa**  $S$  om  $s_n \rightarrow S$  då  $n \rightarrow \infty$ . Annars säger man att serien är **divergent**.

Det vill säga vi undrar om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  existerar, så man kan tänka på det hela som en generaliserad summa. Det är också klart att serien är konvergent om och endast om det finns något  $j$  så att serien  $\sum_{k=j}^{\infty} a_k$  är konvergent (ibland börjar man summan vid ett annat tal än 1...). Oändliga summor är linjära i den mening att följande gäller för konvergenta serier:

**Sats 3.8 (Linjäritet)**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

**Sats 3.9 (Geometrisk serie)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ om } |q| < 1, \text{ annars divergent.}$$

Nu återstår att ge villkor som garanterar konvergens hos en serie (det är oftast mycket svårt att bestämma vilket värde en serie konvergerar mot, men å andra sidan är det lätt att uppskatta seriens värde om man kan kontrollera felet genom att helt enkelt hugga av serien vid ett stort ändligt värde ...).

**Sats 3.10 (Divergenstest)**

Om termerna  $a_k \not\rightarrow 0$  då  $k \rightarrow \infty$  så divergerar serien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Även för serier är de som har positiva termer lite enklare att hantera, och vi har precis som för integraler ett jämförelsekriterium:

**Sats 3.11 (Jämförelsekriteriet)**

Om  $0 \leq a_k \leq b_k$  så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent och } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent.}$$

Givetvis är det bara viktigt att dessa olikheter gäller för stora  $k$  i jämförelsekriteriet, och det är lätt att utifrån detta visa jämförelseprincipen på gränsvärdesform. T.ex. om vi har två serier

med icke-negativa termer och  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = C < \infty$  så gäller ju per definition att  $a_k < (C + 1)b_k$  för stora  $k$ .

**Sats 3.12 (Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform)**

Om  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$  och

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$

då är antingen båda serierna  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergenta eller divergenta.

**Sats 3.13 (Cauchys integralkriterium)**

Om funktionen  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  är avtagande så är serien  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  och integralen  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  antingen båda konvergenta eller divergenta.

**Sats 3.14 (Jämförelseserier)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

är konvergent om  $\alpha > 1$  och divergent om  $\alpha \leq 1$ .

Notera ovan t.ex. med  $\alpha = 1$  att termerna går mot noll, men serien är ändå divergent (d.v.s omvändningen av divergenstestet gäller ej)!

**Definition 3.15 (Alternerande serier).** En serie där varannan term är positiv och varannan negativ kallas alternerande.

**Sats 3.16 (Leibniz)**

En alternerande serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  där  $|a_k|$  är avtagande och går mot 0 då  $k \rightarrow \infty$  är konvergent.

**Definition 3.17 (Absolutkonvergenta serier).** En serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  sådan att  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  är konvergent sägs vara absolutkonvergent.

**Sats 3.18 (Triangelolikheten)**

En absolutkonvergent serie är konvergent och vidare gäller:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

## 4 Föreläsning 11: Potensserier

En potensserie är en serie (funktion) på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

där  $c_n$  är konstanter och  $x$  en variabel (så för varje fixt  $x$  vi sätter in får vi en numerisk serie). Till varje sådan potensserie finns ett unikt tal  $R$  ( $0 \leq R \leq \infty$ ) sådant att serien är absolutkonvergent om  $|x| < R$ , och divergent om  $|x| > R$  ( $|x| = R$  måste behandlas från fall till fall). För att få fram  $R$  tillämpar vi rot- eller kvotkriteriet nedan med  $a_n = c_n x^n$ .

**Rotkriteriet:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  är absolutkonvergent om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , och divergent om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ .

**Kvotkriteriet:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  är absolutkonvergent om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , och divergent om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ .

Både rot- och kvotkriteriet bygger på jämförelse med geometrisk serie, så det är ganska grova testverktyg, men de är väl lämpade för att behandla potensserier.

## 5 Föreläsning 12: Potensserielösningar av differentialekvationer, Maclaurinserier

Genom att gör ansatsen  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  och använda räknelagarna för derivator givna i sats 5.1 samt samla allt till en summa kan man reducera vissa differentialekvationer till ekvationer för koefficienterna  $c_n$ . I vissa fall kan man lösa ut varje  $c_n$  explicit samt ibland identifiera lösningen i termer av elementära funktioner.

### 5.1 Maclaurinserier

De elementära Maclaurinutvecklingarna som vi gått igenom i 1.3 gäller utan restterm om vi tar med oändligt många termer enligt nedan (notera att det finns naturliga begränsningar på var dessa gäller):



$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1, \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots, \quad -1 < x \leq 1, \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

**Sats 5.1**

Antag att  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  har konvergensradie  $R > 0$ . Då har  $f$  derivator av godtycklig ordning på  $] -R, R[$ , och vi har:

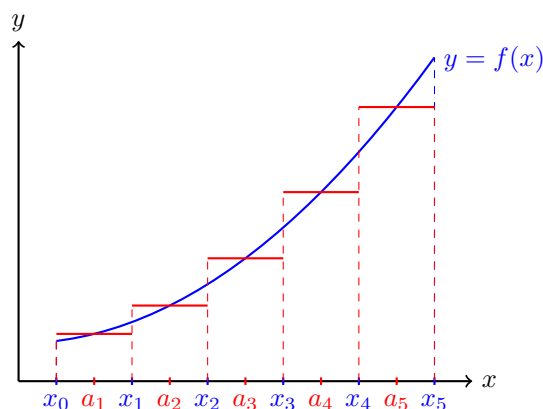
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\
\int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}, \\
c_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.
\end{aligned}$$

(Alla potensserier ovan har konvergensradie  $R$ .)

## 6 Föreläsning 14: Kurvlängd, plan area och volym

### 6.1 Riemannsummor\*

\*Detta är inte direkt en del av denna kurs, men man behöver ha en viss förståelse av hur man approximerar integraler med denna typ av summor för att förstå vad som görs i de andra delarna nedan (det kan dock hållas på en ganska informell nivå).



Om  $a = x_0, b = x_k$  ( $k = 5$  i figuren) gäller att

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^k f(a_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Om  $|f(u) - f(v)| \leq \delta$  för alla  $u, v \in [x_{i-1}, x_i]$  för varje  $i$ , det vill säga skillnaden mellan största och minsta värde för  $f(x)$  på varje intervall  $[x_{i-1}, x_i]$  är som högst  $\delta$ , är felet i denna uppskattning mindre än

$$\delta \cdot (b - a).$$

Speciellt om  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  ser vi att vi genom att välja längderna på intervallen  $[x_{i-1}, x_i]$  tillräckligt små så kan vi få uppskattningen godtyckligt nära integralens värde.

(Det visar sig att detta är sant för alla Riemannintegrabla funktioner.)

**Definition 6.1.** Om  $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_k = b$  och  $x_{i-1} \leq a_i \leq x_i$  för alla  $i = 1, 2, \dots, k$ , då kallas  $\sum_{i=1}^k f(a_i)(x_i - x_{i-1})$  för en **Riemannsumma** till integralen  $\int_a^b f(x)dx$ .

Om vi låter  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  då skulle vi informellt kunna skriva summan

$$\sum_{i=1}^k f(a_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_A f(x)\Delta x,$$

där vi menar att för  $x = a_i$  är  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ . Man kan säga att det i princip är härifrån som beteckningen  $\int_a^b f(x)dx$  kommer ifrån. När vi låter maximala längden på intervallen  $[x_{i-1}, x_i]$  gå mot noll "övergår" mängden  $A$  till hela intervallet  $[a, b]$  och  $f(x)\Delta x$  "övergår" till  $f(x)dx$ , där  $dx$  är "infinitesimalt" litet, så att man kan tänka på  $\int_a^b f(x)dx$  som en slags summering över  $x \in [a, b]$  av de infinitesimalt tunna stolparna med höjd  $f(x)$  och tjocklek  $dx$ . Eftersom  $[a, b]$  inte är uppräknligt är det förstås inte en summa (ens i den mening vi har för oändliga serier), utan ska tolkas som ett gränsvärde av Riemannsummorna.

**Sats 6.2**

Antag att  $f(x)$  är Riemannintegrabel på  $[a, b]$ . Givet  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\delta > 0$  sådant att

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^k f(a_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon$$

för alla indelningar  $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_k = b$  sådana att  $x_i - x_{i-1} \leq \delta$  för alla  $i = 1, 2, \dots, k$ , och alla val av punkter  $a_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Det vill säga, informellt uttryckt, uppskattningen av integralen med en Riemannsumma kan göras godtyckligt bra bara genom att välja längderna på intervallen i uppstyckningen tillräckligt små.

**6.2 Parameterkurvor**

Om  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$  där  $x(t), y(t)$  är kontinuerligt deriverbara så låter vi  $\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ . Vi noterar att för små  $h$  gäller

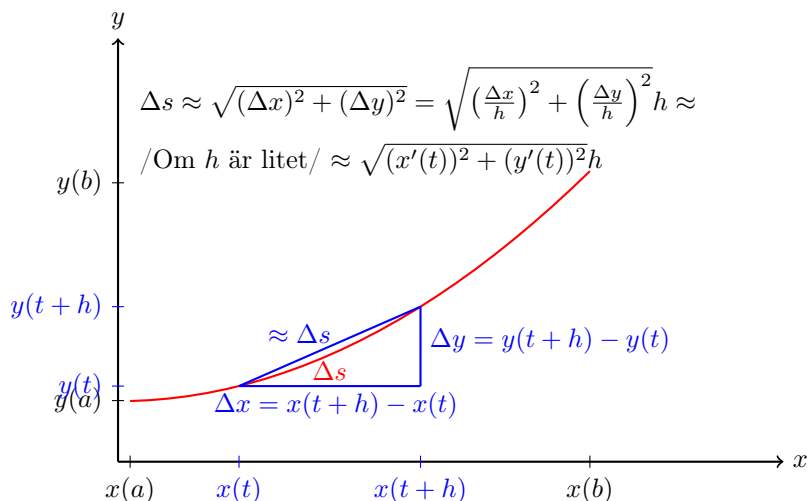
$$|\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)| \approx |\bar{r}'(t)| \cdot |h|,$$

så därför definierar vi längden till parameterkurvan som

$$s = \int_a^b |\bar{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Speciellt om  $\bar{r}(t) = (t, f(t))$  (d.v.s. funktionsgraf), då gäller

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$



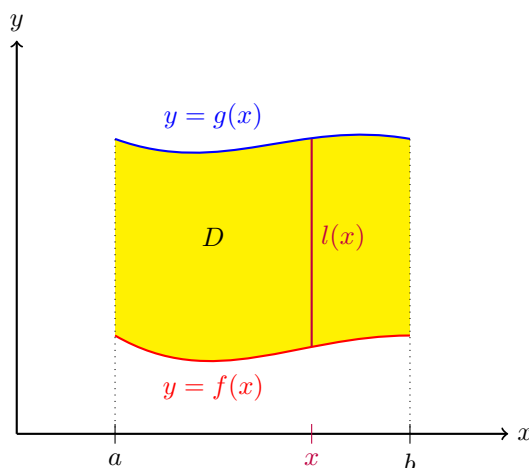
Det är värt att notera att ofta i tillämpningar betecknar  $t$  tiden och  $\bar{r}(t)$  en partikels läge vid tiden  $t$ , och då är  $\bar{r}'(t)$  helt enkelt partikels hastighet. Notera också att det inte är uteslutet att kurvan skär sig själv, eller att man "går" fram och tillbaks längs en kurva, så längden av parameterkurvan ovan ska alltså tolkas som den tillryggalagda sträckan. Om man däremot i en uppgift får en geometrisk kurva som man vill bestämma längden på måste man se till att man parametriserar den så att man bara är i varje punkt en gång (förutom eventuellt i punkter där kurvan "skär" sig själv).

### 6.3 Area av plana områden

Om  $D \subset \mathbb{R}^2$  är på formen  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ , då gäller att dess area  $A(D)$  ges av

$$A(D) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

D.v.s. arean ges av att integrera tvärsnittslängden:



$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

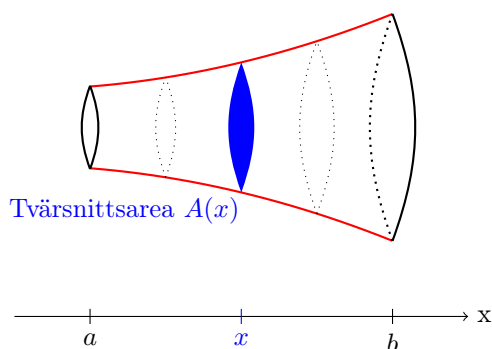
$$A(D) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^b l(x) dx$$

Ibland skrivs även  $dA = l(x) dx$ .

### 6.4 Volym via integration av tvärsnittsareor

Om  $K \subset \mathbb{R}^3$  uppfyller att för varje punkt  $(x, y, z) \in K$  gäller  $a \leq x \leq b$ , samt att tvärsnittsarean längs  $x$ -axeln ges av funktionen  $A(x)$  (d.v.s. den plana mängden  $\{(y, z) : (x, y, z) \in K\}$  har area  $A(x)$  för varje  $x$ ), då ges volymen  $V(K)$  till  $K$  av

$$V(K) = \int_a^b A(x) dx.$$



### 6.5 Rotationsvolym

Även om vi nedan ger formler, så är det bättre att lära sig att ta fram formlerna enligt två enkla principer snarare än att försöka memorera dem. Principerna är att antingen integrera upp tvärsnittsareor i skivor eller cylindrar. Motsvarande kan även sägas för rotationsarea nedan.

Om området

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

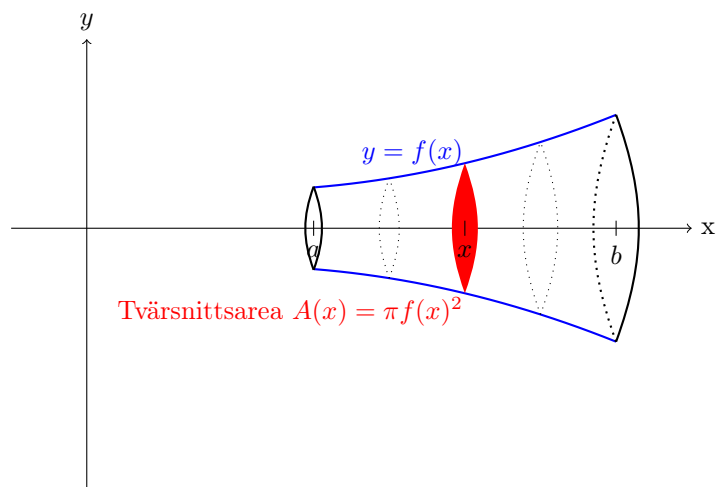
roteras ett varv kring x-axeln får vi en kropp

$$K = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, 0 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\},$$

och dess volym  $V(K)$  ges av

$$V(K) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Detta brukar kallas **skivformeln** då volymen ges av att integrera upp tvärsnittsarean av cirkelskivor enligt bilden nedan.



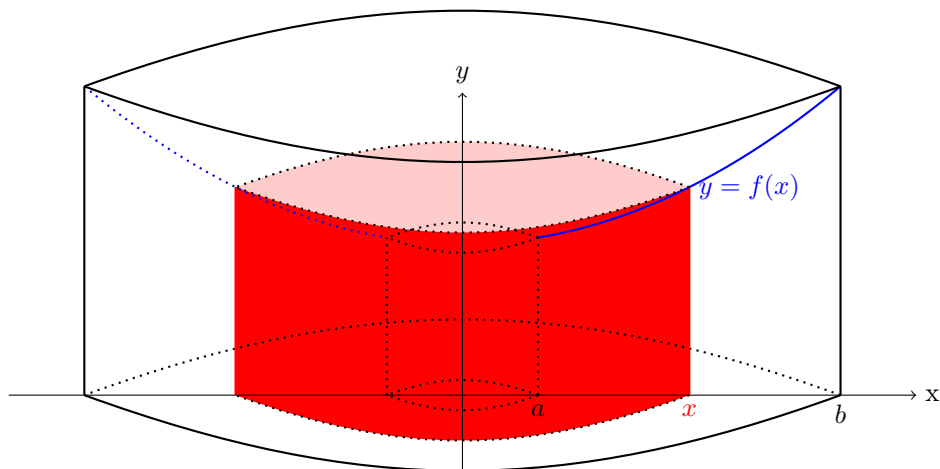
Om vi istället roterar  $D$  kring y-axeln (och  $a \geq 0$  antas) fås

$$K = \{(x, y, z) : a \leq \sqrt{x^2 + z^2} \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

och volymen ges av

$$V(K) = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Detta brukar kallas **cylinderformeln** då volymen ges genom att integrera upp tvärsnittsarean av cylindrar enligt nedanstående bild:



$$\text{Area} = 2\pi x f(x)$$

Mer allmänt:

**Sats 6.3**

Låt  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ .

(a) Om  $D$  ligger helt på en sida om linjen  $y = c$ , då ges volymen av den kropp  $K$  som uppkommer då  $D$  roteras ett varv runt  $y = c$  av:

$$V(K) = \pi \int_a^b |(g(x) - c)^2 - (f(x) - c)^2| dx.$$

(b) Om  $D$  ligger helt på en sida om linjen  $x = c$ , då ges volymen av den kropp  $K$  som uppstår då  $D$  roteras ett varv runt  $x = c$  av:

$$V(K) = 2\pi \int_a^b |x - c|(g(x) - f(x)) dx.$$

Notera att i satsen ovan i fall (a) får man areor av ihåliga cirkelskivor som integrand, och i (b) återigen arean av cylindrar.

**6.6 Polära koordinater**

Kom ihåg att en punkt i planet kan skrivas på formen

$$(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

där  $r$  är längden  $r = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$  och  $\phi$  vinkeln mellan "vektorn" och  $x$ -axeln.

**Area för områden på polär form:**  $D = \{(x, y) : \alpha \leq \phi \leq \beta, 0 \leq r \leq h(\phi)\}$  ger

$$A(D) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} h(\phi)^2 d\phi.$$

**Längd hos parameterkurvor på polär form:** Om  $r = h(\phi)$ ,  $\alpha \leq \phi \leq \beta$  så fås längden

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h(\phi)^2 + h'(\phi)^2} d\phi.$$

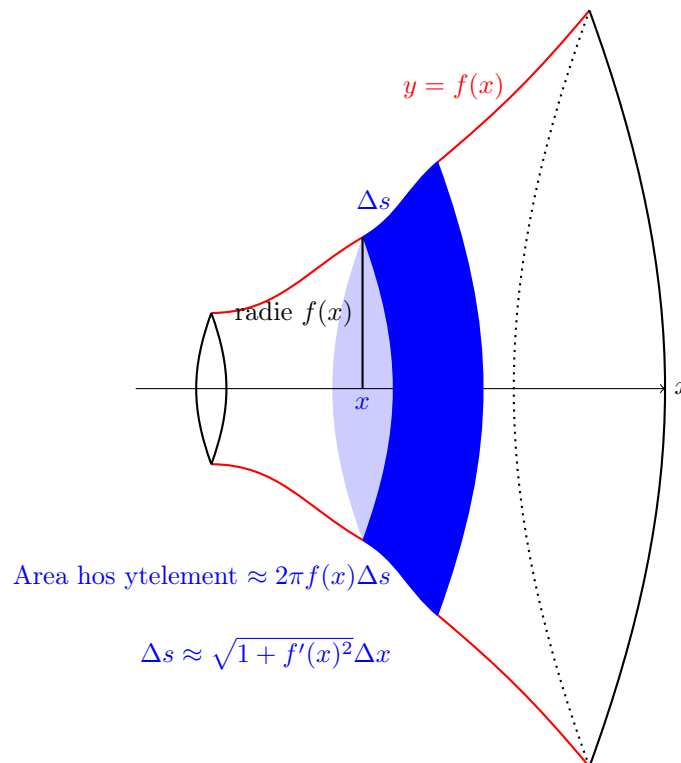
## 7 Föreläsning 15: Rotationsarea, tyngdpunkter och Guldins regler

### 7.1 Area hos rotationsytor

Om kurvan  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  ligger helt på en sida om linjen  $y = c$  och roteras ett varv kring denna fås en yta som har area

$$2\pi \int_a^b |f(x) - c| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

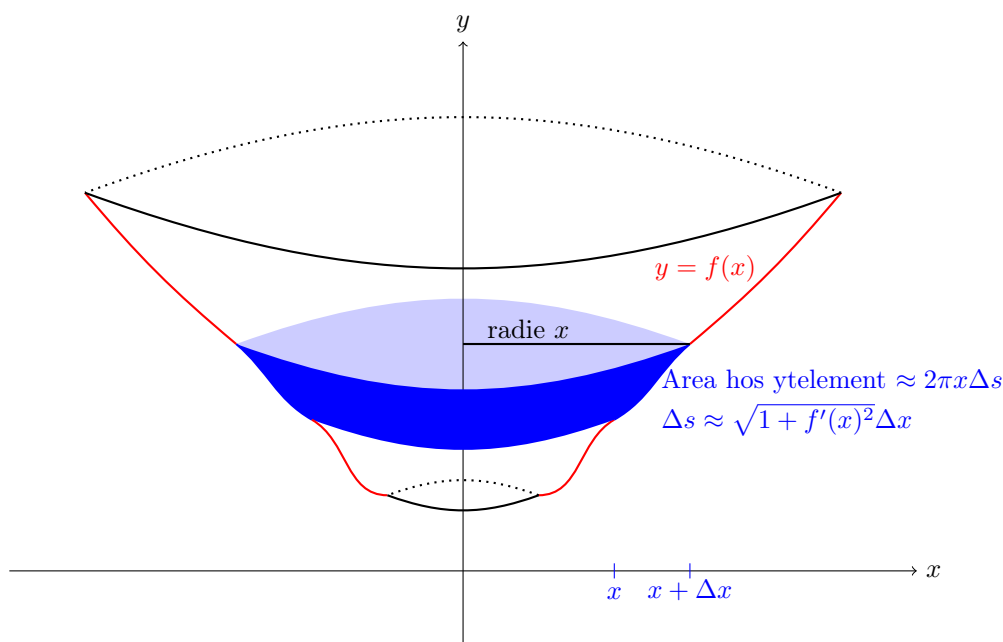
Nedan ser vi en figur för fallet  $c = 0$ .



Om kurvan  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  ligger helt på en sida om linjen  $x = c$  och roteras ett varv kring denna så fås en yta med arean

$$2\pi \int_a^b |x - c| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Nedan ser vi en figur för fallet  $c = 0$ .



## 7.2 Tyngdpunkter

Vi lämnar den “djupare” diskussionen om detta till kursboken. Det allra viktigaste är troligen att förstå hur man med Guldins regler tillämpat på “små element” kan ta fram korrekta formler för rotationsvolym/rotationsareor.

Ett fall vi dock kan nämna är att om en plan kropp har konstant densitet och är på formen

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

då ges tyngdpunktens  $x$ -koordinat  $x_t$  av:

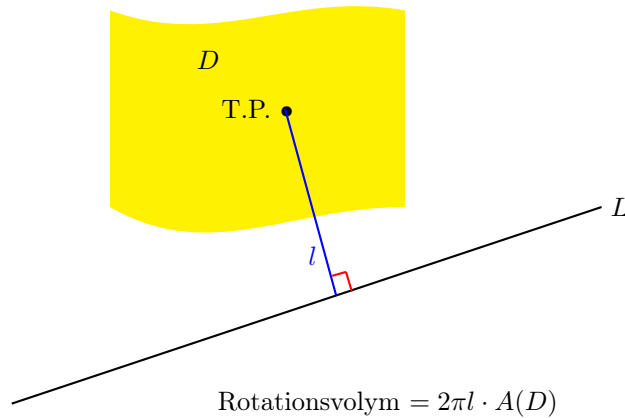
$$x_t = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x))dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))dx}.$$

### Sats 7.1 (Guldins regel, area/volym)

Antag att det plana området  $D$  med area  $A(D)$  och tyngdpunkt  $\bar{r}_t$  ligger helt och hållet på en sida om linjen  $L$  i  $\mathbb{R}^2$ . Då ges volymen av den kropp som uppkommer då  $D$  roteras ett varv runt  $L$  av:

$A(D) \cdot$  (längden på  $\bar{r}_t$ :s väg vid rotationen).

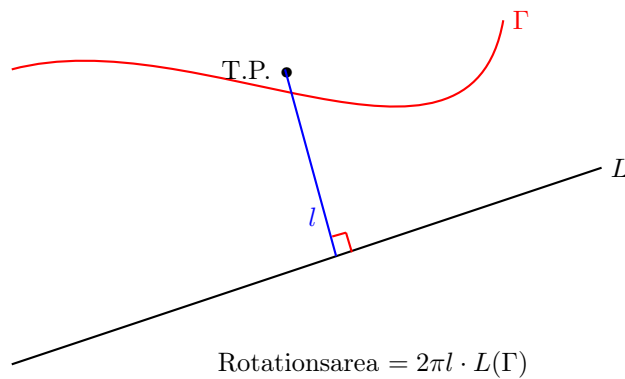




**Sats 7.2 (Guldins regel, längd/area)**

Antag att den plana kurvan  $\Gamma$  med längd  $L(\Gamma)$  och tyngdpunkt  $\bar{r}_t$  ligger helt och hållet på en sida om linjen  $L$  i  $\mathbb{R}^2$ . Då ges arean av den yta som uppkommer då  $\Gamma$  roteras ett varv runt  $L$  av:

$L(\Gamma) \cdot$  (längden på  $\bar{r}_t$ 's väg vid rotationen).



**Rotationsvolym på polär form** Om  $D = \{(x, y) : \alpha \leq \phi \leq \beta, 0 \leq r \leq h(\phi)\}$ , där  $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ , roteras ett varv runt  $x$ -axeln, så ges volymen av den kropp som uppkommer av

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{2\pi}{3} h(\phi)^3 \sin \phi d\phi.$$

**Rotationsarea på polär form** Om kurvan  $r = h(\phi)$ ,  $0 \leq \alpha \leq \phi \leq \beta \leq \pi$ , roteras ett varv runt  $x$ -axeln så uppstår en yta med area:

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} h(\phi) \sin(\phi) \sqrt{h(\phi)^2 + h'(\phi)^2} d\phi.$$