<u>Exempel:</u> Visa att $|f(x) - p_5(x)| \leq 10^{-3}$

för alla $x \in [-1/2, 1/2]$, där

$f(x) = \ln(1-x^2)$ och $p_5(x)$ är 5:e ordningens

Maclaurinpolynom till $f(x)$.

<u>L:</u> $g(t) = \ln(1+t)$; $f(x) = g(-x^2)$.

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \frac{g'''(\xi)}{3!}t^3$$

för ngt ξ mellan 0 och t.

$g(0) = 0 \qquad (g(t) = \ln(1+t))$

$g'(t) = \frac{1}{1+t}\ ; \quad g'(0) = 1$

$g''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}\ ; \quad g''(0) = -1$

$g'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}\ .$

$g(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3!\,(1+\xi)^3}\, t^3$ $\qquad \xi$ mellan 0 och t

$g(-x^2) = f(x) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{1}{3(1+\xi)^3}(-x^2)^3$

$$f(x) = \underbrace{-x^2 - \frac{x^4}{2}}_{P_5(x)} - \underbrace{\frac{x^6}{3(1+\xi)^3}}_{O(x^6)}$$

, fōr ngt $-x^2 \le \xi \le 0$.

$$|f(x) - P_5(x)| = \left| -\frac{x^6}{3(1+\xi)^3} \right| = \frac{|x|^6}{|3(1+\xi)^3|} \le$$

$\le$ $|x|^6 \le \left|\frac{1}{2}\right|^6 = \frac{1}{2^6}$ dà $-1/2 \le x \le 1/2$

$3(1+\xi)^3 \ge 3(1 - 1/4)^3 = 81/4$ dà $-1/4 \le -x^2 \le \xi \le 0$

$$\le \frac{1/2^6}{81/4} = \ldots = \frac{1}{1296} < 10^{-3}.$$