Taylorutvecklingar.

Taylors sats:

Taylors sats:

Antag att f har kontinuerliga derivator t.o.m. ordning $n+1$ på det begränsade intervallet $[\alpha,\beta]$ och att $\alpha \le a \le \beta$.

Då gäller att

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(x)} + r_n(x)$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = b(x)(x-a)^{n+1} = O((x-a)^{n+1})$$

för ngt. ξ mellan a och x.

Polynomet p_n är unikt bestämt av

- $\operatorname{grad} p_n \leq n$
- $p_n(a) = f(a),\ p_n'(a) = f'(a),\ \ldots,\ p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

Maclaurins formel:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

där $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = O(x^{n+1})$

för ngt. ξ mellan 0 och x.

Entydighetssatsen

Om $f(x) = q(x) + O((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$ där polynomet $q(x)$ har grad $\leq n$, då är $q(x)$ Taylorpolynomet av ordning n till f i a.

Elementära Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}),\\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}).
\end{aligned}$$

Ovan är

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}, \ldots$$