Exempel

Avgör om $\int_1^\infty \sin(x) \ln\left(1 + \frac{1}{x^5}\right)\, dx$ är konvergent.

Lösning

Vi har

$$0 \leq \left| \sin(x) \ln\left(1 + \frac{1}{x^5}\right) \right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x^5}\right) \text{ då } 1 < x < \infty.$$

Lösning

Vi har

$$0 \leq \left| \sin(x) \ln\left(1 + \frac{1}{x^5}\right) \right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x^5}\right) \text{ då } 1 < x < \infty.$$

Vi börjar med att visa att

$$\int_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)\, dx$$

är konvergent.

Vi börjar med att visa att

$$\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)\, dx$$

är konvergent.

Integralen är generaliserad endast i oändligheten.

Vi börjar med att visa att

$$\int_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)\, dx$$

är konvergent.
Integralen är generaliserad endast i oändligheten.

$$\ln(1+1/x^5) = 1/x^5 + \mathcal{O}((1/x^5)^2) \text{ då } x \to \infty.$$

Vi börjar med att visa att

$$\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)\,dx$$

är konvergent.
Integralen är generaliserad endast i oändligheten.

$$\ln(1+1/x^5) = 1/x^5 + \mathcal{O}((1/x^5)^2) \text{ då } x \to \infty.$$

Vi jämför med den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^5}dx$$

som är konvergent.

Vi börjar med att visa att

$$\int_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^5}\right)\, dx$$

är konvergent.
Integralen är generaliserad endast i oändligheten.

$$\ln(1 + 1/x^5) = 1/x^5 + \mathcal{O}((1/x^5)^2) \text{ då } x \to \infty.$$

Vi jämför med den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5}\, dx$$

som är konvergent.
Eftersom

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/x^5)}{1/x^5} = 1 < \infty,$$

så följer från jämförelseprincipen på gränsvärdesform att integralen är konvergent.

Eftersom

$$\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)\,dx$$

är konvergent och

$$0 \leq \left|\sin(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)\right| \leq \ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right) \text{ då } 1 < x < \infty$$

så är integralen absolutkonvergent, och därmed konvergent.