Generaliserade integraler

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Generaliserade integraler

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ nedan.

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ nedan.
Vi ska se på integraler på formen

$$\int_a^b f(x)dx,$$

där f är kontinuerlig på $]a, b[$.

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ nedan.
Vi ska se på integraler på formen

$$\int_a^b f(x)dx,$$

där f är kontinuerlig på $]a, b[$.
En sådan kan vara odefinierad i vanlig Riemann-mening av två skäl:

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ nedan.
Vi ska se på integraler på formen

$$\int_a^b f(x)dx,$$

där f är kontinuerlig på $]a, b[$.
En sådan kan vara odefinierad i vanlig Riemann-mening av två skäl:

(1) $]a, b[$ är obegränsat,

Generaliserade integraler

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ nedan.
Vi ska se på integraler på formen

$$\int_a^b f(x)dx,$$

där f är kontinuerlig på $]a, b[$.
En sådan kan vara odefinierad i vanlig Riemann-mening av två skäl:

(1) $]a, b[$ är obegränsat,

(2) $f(x)$ är obegränsad då $x \to a^+$ och/eller då $x \to b^-$.

Definition

Låt f vara kontinuerlig på intervallet $]a,b[$. Om det för $c\in]a,b[$ är så att båda gränsvärdena

$$\lim_{s\to a^+}\int_s^c f(x)dx$$

och

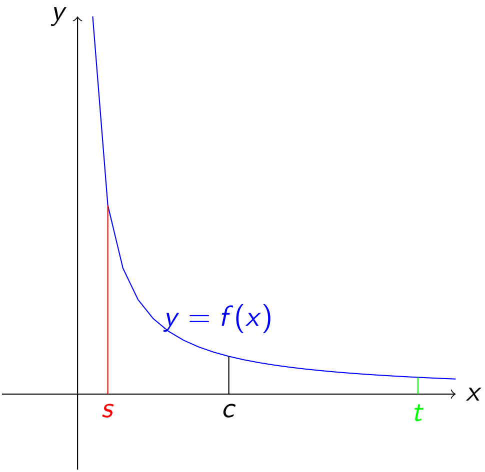
$$\lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)dx$$

existerar och är ändliga, då säger vi att f är generaliserat integrabel på $]a,b[$ och definierar

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to a^+}\int_s^c f(x)dx + \lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)dx.$$

Generaliserade integraler

$\int_0^\infty f(x)dx$:



Definition

Integralen ovan sägs vara generaliserad i a (b) om antingen $a = -\infty$ ($b = \infty$) och/eller f är obegränsad i någon omgivning till a (b).

Sats

- *Definitionen ovan beror inte på valet av* c.

Generaliserade integraler

Sats

- *Definitionen ovan beror inte på valet av* c.
- *Om* f *är Riemann-integrabel på* $]a, b[$ *i vanlig mening så är den även det i generaliserad mening med samma värde på integralerna.*

Sats

Om $\int_a^b f(x)dx$ *är generaliserad*

Sats

Om $\int_a^b f(x)dx$ *är generaliserad*

- *enbart i b, då gäller att*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

Sats

Om $\int_a^b f(x)dx$ *är generaliserad*

- *enbart i b, då gäller att*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

- *enbart i a, då gäller att*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to a^+} \int_s^b f(x)dx.$$

Konvergent/Divergent integral

Konvergent/Divergent integral

Om den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)dx$ existerar (med ändligt värde) så sägs den vara **konvergent**, och **divergent** ifall den inte gör det.

Konvergent/Divergent integral

Om den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)dx$ existerar (med ändligt värde) så sägs den vara **konvergent**, och **divergent** ifall den inte gör det.
Notera att vi oftast bara kommer vara intresserade av att avgöra om en integral är konvergent eller inte, och inte att beräkna dess exakta värde.

Linjäritet

Generaliserade integraler är linjära:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$