Exempel

Bestäm den allmänna lösningen till

$$y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 24x^2\mathrm{e}^{2x} + \sin x.$$

Lösning

Lösning

$$p(D)y = y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 24x^2 \mathrm{e}^{2x} + \sin x.$$

Lösning

$$p(D)y = y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 24x^2 e^{2x} + \sin x.$$

Homogen ekvation:

Lösning

$$p(D)y = y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 24x^2 e^{2x} + \sin x.$$

Homogen ekvation: $p(r) = r^3 - 4r^2 + 4r = r(r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0$ (enkelrot) eller $r_2 = 2$ (dubbelrot).

Lösning

$$p(D)y = y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 24x^2\mathrm{e}^{2x} + \sin x.$$

Homogen ekvation: $p(r) = r^3 - 4r^2 + 4r = r(r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0$ (enkelrot) eller $r_2 = 2$ (dubbelrot).

Den homogena ekvationen $y_h^{(3)} - 4y_h'' + 4y_h' = 0$

Lösning

$$p(D)y = y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 24x^2 e^{2x} + \sin x.$$

Homogen ekvation: $p(r) = r^3 - 4r^2 + 4r = r(r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0$ (enkelrot) eller $r_2 = 2$ (dubbelrot).
Den homogena ekvationen $y_h^{(3)} - 4y_h'' + 4y_h' = 0$
har den allmänna lösningen

$$y_h = \underbrace{P_1(x)}_{\text{grad } 0} e^{r_1 x} + \underbrace{P_2(x)}_{\text{grad } 1} e^{r_2 x}$$

Lösning

$$p(D)y = y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 24x^2\mathrm{e}^{2x} + \sin x.$$

Homogen ekvation: $p(r) = r^3 - 4r^2 + 4r = r(r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0$ (enkelrot) eller $r_2 = 2$ (dubbelrot).
Den homogena ekvationen $y_h^{(3)} - 4y_h'' + 4y_h' = 0$
har den allmänna lösningen

$$y_h = \underbrace{P_1(x)}_{\text{grad } 0}\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \underbrace{P_2(x)}_{\text{grad } 1}\,\mathrm{e}^{r_2 x} = C_1 + (C_2 x + C_3)\mathrm{e}^{2x}.$$

Lösning

Partikulärlösning:

Lösning

Partikulärlösning:

Linjäritet ger att om y_1, y_2 löser

$$p(D)y_1 = 24x^2 e^{2x}, \text{ och } p(D)y_2 = \sin x,$$

Linjäritet ger att om y_1, y_2 löser

$$p(D)y_1 = 24x^2\mathrm{e}^{2x}, \text{ och } p(D)y_2 = \sin x,$$

då kommer $y_p = y_1 + y_2$ lösa

$$p(D)y_p = p(D)(y_1 + y_2) = p(D)y_1 + p(D)y_2 = 24x^2\mathrm{e}^{2x} + \sin x.$$

Lösning

Substitutionen $y_1 = z\mathrm{e}^{2x}$ ger:

Lösning

Substitutionen $y_1 = z\mathrm{e}^{2x}$ ger:

$$y_1' = z'\mathrm{e}^{2x} + 2z\mathrm{e}^{2x}, \quad y_1'' = z''\mathrm{e}^{2x} + 4z'\mathrm{e}^{2x} + 4z\mathrm{e}^{2x},$$

$$y_1^{(3)} = z^{(3)}\mathrm{e}^{2x} + 6z''\mathrm{e}^{2x} + 12z'\mathrm{e}^{2x} + 8z\mathrm{e}^{2x}.$$

Lösning

Substitutionen $y_1 = z\mathrm{e}^{2x}$ ger:

$$y_1' = z'\mathrm{e}^{2x} + 2z\mathrm{e}^{2x}, \quad y_1'' = z''\mathrm{e}^{2x} + 4z'\mathrm{e}^{2x} + 4z\mathrm{e}^{2x},$$

$$y_1^{(3)} = z^{(3)}\mathrm{e}^{2x} + 6z''\mathrm{e}^{2x} + 12z'\mathrm{e}^{2x} + 8z\mathrm{e}^{2x}.$$

Insatt i ekvationen får vi:

$$\begin{aligned}&y_1^{(3)} - 4y_1'' + 4y_1' \\ &= ((z^{(3)} + 6z'' + 12z' + 8z) - 4(z'' + 4z' + 4z) + 4(z' + 2z))\mathrm{e}^{2x}\end{aligned}$$

Lösning

Substitutionen $y_1 = z\mathrm{e}^{2x}$ ger:

$$y_1' = z'\mathrm{e}^{2x} + 2z\mathrm{e}^{2x}, \quad y_1'' = z''\mathrm{e}^{2x} + 4z'\mathrm{e}^{2x} + 4z\mathrm{e}^{2x},$$

$$y_1^{(3)} = z^{(3)}\mathrm{e}^{2x} + 6z''\mathrm{e}^{2x} + 12z'\mathrm{e}^{2x} + 8z\mathrm{e}^{2x}.$$

Insatt i ekvationen får vi:

$$\begin{aligned}
&y_1^{(3)} - 4y_1'' + 4y_1' \\
&= ((z^{(3)} + 6z'' + 12z' + 8z) - 4(z'' + 4z' + 4z) + 4(z' + 2z))\mathrm{e}^{2x} \\
&= \ldots = (z^{(3)} + 2z'')\mathrm{e}^{2x} = 24x^2\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$

Lösning

Substitutionen $y_1 = z\mathrm{e}^{2x}$ ger:

$$y_1' = z'\mathrm{e}^{2x} + 2z\mathrm{e}^{2x}, \quad y_1'' = z''\mathrm{e}^{2x} + 4z'\mathrm{e}^{2x} + 4z\mathrm{e}^{2x},$$

$$y_1^{(3)} = z^{(3)}\mathrm{e}^{2x} + 6z''\mathrm{e}^{2x} + 12z'\mathrm{e}^{2x} + 8z\mathrm{e}^{2x}.$$

Insatt i ekvationen får vi:

$$\begin{aligned}
&y_1^{(3)} - 4y_1'' + 4y_1' \\
&= ((z^{(3)} + 6z'' + 12z' + 8z) - 4(z'' + 4z' + 4z) + 4(z' + 2z))\mathrm{e}^{2x} \\
&= \ldots = (z^{(3)} + 2z'')\mathrm{e}^{2x} = 24x^2\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$

Detta är ekvivalent med

$$z^{(3)} + 2z'' = 24x^2.$$

Lösning

Substitutionen $y_1 = z\mathrm{e}^{2x}$ ger:

$$y_1' = z'\mathrm{e}^{2x} + 2z\mathrm{e}^{2x}, \quad y_1'' = z''\mathrm{e}^{2x} + 4z'\mathrm{e}^{2x} + 4z\mathrm{e}^{2x},$$

$$y_1^{(3)} = z^{(3)}\mathrm{e}^{2x} + 6z''\mathrm{e}^{2x} + 12z'\mathrm{e}^{2x} + 8z\mathrm{e}^{2x}.$$

Insatt i ekvationen får vi:

$$\begin{aligned}
&y_1^{(3)} - 4y_1'' + 4y_1' \\
&= ((z^{(3)} + 6z'' + 12z' + 8z) - 4(z'' + 4z' + 4z) + 4(z' + 2z))\mathrm{e}^{2x} \\
&= \ldots = (z^{(3)} + 2z'')\mathrm{e}^{2x} = 24x^2\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$

Detta är ekvivalent med

$$z^{(3)} + 2z'' = 24x^2.$$

Ansats $z = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$ ger $z' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$, $z'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$, $z^{(3)} = 24Ax + 6B$.

Lösning

Insatt ovan ger detta

$$z^{(3)} + 2z'' = \ldots = 24Ax^2 + (24A + 12B)x + (6B + 4C) = 24x^2.$$

Lösning

Insatt ovan ger detta

$$z^{(3)} + 2z'' = \ldots = 24Ax^2 + (24A + 12B)x + (6B + 4C) = 24x^2.$$

Detta är ekvivalent med $A = 1, B = -2, C = 3,$

Lösning

Insatt ovan ger detta

$$z^{(3)} + 2z'' = \ldots = 24Ax^2 + (24A + 12B)x + (6B + 4C) = 24x^2.$$

Detta är ekvivalent med $A = 1, B = -2, C = 3$, så

$$y_1 = (x^4 - 2x^3 + 3x^2)\mathrm{e}^{2x}.$$

Lösning

Ansatsen $y_2 = A\cos x + B\sin x$ ger $y_2' = -A\sin x + B\cos x$, $y_2'' = -A\cos x - B\sin x$, $y_2^{(3)} = A\sin x - B\cos x$.

Lösning

Ansatsen $y_2 = A\cos x + B\sin x$ ger $y_2' = -A\sin x + B\cos x$,
$y_2'' = -A\cos x - B\sin x$, $y_2^{(3)} = A\sin x - B\cos x$.
Insatt i ekvationen får vi

$$y_2^{(3)} - 4y_2'' + 4y_2' =$$
$$(A\sin x - B\cos x) - 4(-A\cos x - B\sin x) + 4(-A\sin x + B\cos x)$$

Lösning

Ansatsen $y_2 = A\cos x + B\sin x$ ger $y_2' = -A\sin x + B\cos x$, $y_2'' = -A\cos x - B\sin x$, $y_2^{(3)} = A\sin x - B\cos x$.
Insatt i ekvationen får vi

$$
\begin{aligned}
&y_2^{(3)} - 4y_2'' + 4y_2' = \\
&(A\sin x - B\cos x) - 4(-A\cos x - B\sin x) + 4(-A\sin x + B\cos x) \\
&= \ldots = (4A + 3B)\cos x + (4B - 3A)\sin x = \sin x.
\end{aligned}
$$

Lösning

Ansatsen $y_2 = A\cos x + B\sin x$ ger $y_2' = -A\sin x + B\cos x$, $y_2'' = -A\cos x - B\sin x$, $y_2^{(3)} = A\sin x - B\cos x$.
Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned}
&y_2^{(3)} - 4y_2'' + 4y_2' = \\
&(A\sin x - B\cos x) - 4(-A\cos x - B\sin x) + 4(-A\sin x + B\cos x) \\
&= \ldots = (4A + 3B)\cos x + (4B - 3A)\sin x = \sin x.
\end{aligned}$$

Detta ger $A = -3/25$, $B = 4/25$.

Lösning

Ansatsen $y_2 = A\cos x + B\sin x$ ger $y_2' = -A\sin x + B\cos x$,
$y_2'' = -A\cos x - B\sin x$, $y_2^{(3)} = A\sin x - B\cos x$.
Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned}
&y_2^{(3)} - 4y_2'' + 4y_2' = \\
&(A\sin x - B\cos x) - 4(-A\cos x - B\sin x) + 4(-A\sin x + B\cos x) \\
&= \ldots = (4A + 3B)\cos x + (4B - 3A)\sin x = \sin x.
\end{aligned}$$

Detta ger $A = -3/25$, $B = 4/25$.
Så

$$y_2 = \frac{-3}{25}\cos x + \frac{4}{25}\sin x.$$

Svar: $y = y_h + y_1 + y_2 =$
$C_1 + (C_2 x + C_3)\mathrm{e}^{2x} + (x^4 - 2x^3 + 3x^2)\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{25}\cos x + \frac{4}{25}\sin x$.

y_1 med förskjutningsregeln

$$p(D)(z\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{2x} p(D+2)z,$$

y_1 med förskjutningsregeln

$$p(D)(z\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{2x} p(D+2)z,$$

$p(D) = D^3 - 4D^2 + 4D = D(D-2)^2$ ger nu

$$p(D)(z\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{2x} p(D+2)z,$$

$p(D) = D^3 - 4D^2 + 4D = D(D-2)^2$ ger nu

$$\mathrm{e}^{2x} p(D+2)z = \mathrm{e}^{2x}(D+2)((D+2)-2)^2 z$$

y_1 med förskjutningsregeln

$$p(D)(z\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{2x} p(D+2)z,$$

$p(D) = D^3 - 4D^2 + 4D = D(D-2)^2$ ger nu

$$\mathrm{e}^{2x} p(D+2)z = \mathrm{e}^{2x}(D+2)((D+2)-2)^2 z$$

$$= \mathrm{e}^{2x}(D+2)D^2 z = \mathrm{e}^{2x}(D^3 + 2D^2)z$$

y_1 med förskjutningsregeln

$$p(D)(z\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{2x} p(D+2)z,$$

$p(D) = D^3 - 4D^2 + 4D = D(D-2)^2$ ger nu

$$\mathrm{e}^{2x} p(D+2)z = \mathrm{e}^{2x}(D+2)((D+2)-2)^2 z$$

$$= \mathrm{e}^{2x}(D+2)D^2 z = \mathrm{e}^{2x}(D^3 + 2D^2)z = \mathrm{e}^{2x}(z^{(3)} + 2z'').$$