Partikulärlösningar

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Partikuläransatser

Partikuläransatser

$$p(D)y = y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 y' + c_0 y = g(x).$$

Partikuläransatser

$$p(D)y = y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 y' + c_0 y = g(x).$$

- $g(x)$ polynom av grad m: Om k är det minsta talet sådant att $c_k \neq 0$ (om $c_k = 0$ för alla $k = 1, \ldots, n-1$ sätter vi $k = n$) då ansätter vi

$$y_p = a_m x^{m+k} + a_{m-1}x^{m+k-1} + \ldots + a_0 x^k.$$

Partikuläransatser

$$p(D)y = y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 y' + c_0 y = g(x).$$

- $g(x)$ polynom av grad m: Om k är det minsta talet sådant att $c_k \neq 0$ (om $c_k = 0$ för alla $k = 1, \ldots, n-1$ sätter vi $k = n$) då ansätter vi
$$y_p = a_m x^{m+k} + a_{m-1}x^{m+k-1} + \ldots + a_0 x^k.$$
- $g(x) = q(x)e^{kx}$: Substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ och använd förskjutningsregeln för att bli av med e^{kx}−termen. Detta ger en ny ekvation för z:
$$p(D+k)z = q(x)$$
som vi förhoppningsvis kan hitta en partikulärlösning z_p till. Då blir $y_p = z_p e^{kx}$.

Partikuläransatser

- Om $g(x) = A\cos(kx)$ (alternativt $g(x) = A\sin(kx)$) fungerar det oftast med ansatsen $y_p = a\cos(kx) + b\sin(kx)$. Notera dock att det kan hända att $\cos(kx)$ är en homogenlösning och då fungerar detta ej.

Linjäritet

Om vi har ekvationen $p(D)y = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_k(x)$, då kan vi hitta en partikulärlösning $p(D)y_i = g_i(x)$ för varje i och sedan sätta $y_p = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$.

Resonans

De fall som är stökigast att hantera är fallet då $g(x)$ på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen.

Resonans

De fall som är stökigast att hantera är fallet då $g(x)$ på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen.
Om $g(x) = q(x)e^{kx}$ som ovan (där k eventuellt är komplext) då kan vi fortfarande substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ och använda förskjutningsregeln som tidigare.

Resonans

De fall som är stökigast att hantera är fallet då $g(x)$ på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen.
Om $g(x) = q(x)e^{kx}$ som ovan (där k eventuellt är komplext) då kan vi fortfarande substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ och använda förskjutningsregeln som tidigare.
Detta fungerar bra även om e^{kx} råkar vara en homogenlösning.

Resonans

De fall som är stökigast att hantera är fallet då $g(x)$ på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen.
Om $g(x) = q(x)e^{kx}$ som ovan (där k eventuellt är komplext) då kan vi fortfarande substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ och använda förskjutningsregeln som tidigare.
Detta fungerar bra även om e^{kx} råkar vara en homogenlösning.
Men vi kan även råka ut för detta om vi har t.ex.
$g(x) = q(x)\cos(kx)$ (alternativt $q(x)\sin(kx)$).

Resonans

De fall som är stökigast att hantera är fallet då $g(x)$ på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen.
Om $g(x) = q(x)e^{kx}$ som ovan (där k eventuellt är komplext) då kan vi fortfarande substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ och använda förskjutningsregeln som tidigare.
Detta fungerar bra även om e^{kx} råkar vara en homogenlösning.
Men vi kan även råka ut för detta om vi har t.ex.
$g(x) = q(x)\cos(kx)$ (alternativt $q(x)\sin(kx)$).
Vi kan dock skriva om detta till komplex form: $\cos(kx) = \mathrm{Re}\, e^{ikx}$ ($\sin(kx) = \mathrm{Im}\, e^{ikx}$).

Resonans

De fall som är stökigast att hantera är fallet då $g(x)$ på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen.
Om $g(x) = q(x)e^{kx}$ som ovan (där k eventuellt är komplext) då kan vi fortfarande substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ och använda förskjutningsregeln som tidigare.
Detta fungerar bra även om e^{kx} råkar vara en homogenlösning.
Men vi kan även råka ut för detta om vi har t.ex.
$g(x) = q(x)\cos(kx)$ (alternativt $q(x)\sin(kx)$).
Vi kan dock skriva om detta till komplex form: $\cos(kx) = \mathrm{Re}\, e^{ikx}$ ($\sin(kx) = \mathrm{Im}\, e^{ikx}$).
Om vi istället hittar en partikulärlösning w_p till ekvationen

$$p(D)w = q(x)e^{ikx},$$

då får vi en partikulärlösning via $y_p = \mathrm{Re}\, w_p$ ($y_p = \mathrm{Im}\, w_p$).

Resonans

De fall som är stökigast att hantera är fallet då $g(x)$ på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen.
Om $g(x) = q(x)e^{kx}$ som ovan (där k eventuellt är komplext) då kan vi fortfarande substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ och använda förskjutningsregeln som tidigare.
Detta fungerar bra även om e^{kx} råkar vara en homogenlösning.
Men vi kan även råka ut för detta om vi har t.ex.
$g(x) = q(x)\cos(kx)$ (alternativt $q(x)\sin(kx)$).
Vi kan dock skriva om detta till komplex form: $\cos(kx) = \mathrm{Re}\, e^{ikx}$ ($\sin(kx) = \mathrm{Im}\, e^{ikx}$).
Om vi istället hittar en partikulärlösning w_p till ekvationen

$$p(D)w = q(x)e^{ikx},$$

då får vi en partikulärlösning via $y_p = \mathrm{Re}\, w_p$ ($y_p = \mathrm{Im}\, w_p$).
Notera att detta dock bygger på att koefficienterna i $p(D)$ är reella.