Exempel

Visa att

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Integralkriteriet

Om funktionen $f(x)$ är positiv och avtagande på $[1,\infty[$, så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och integralen $\int_1^{\infty} f(x)dx$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Om funktionen $f(x)$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$, så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och integralen $\int_1^{\infty} f(x)dx$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.
Detta bygger på att vi får över- och undertrappor:

$$\sum_{k=J+1}^{N} f(k) \leq \int_J^N f(t)dt \leq \sum_{k=J}^{N-1} f(k).$$

Integralkriteriet

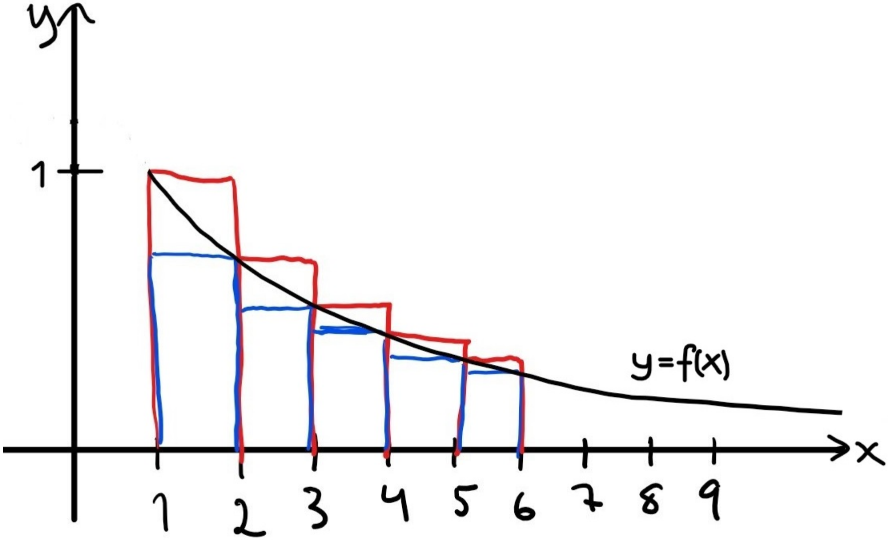
Om funktionen $f(x)$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$, så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och integralen $\int_1^{\infty} f(x)dx$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Detta bygger på att vi får över- och undertrappor:

$$\sum_{k=J+1}^{N} f(k) \leq \int_J^N f(t)dt \leq \sum_{k=J}^{N-1} f(k).$$

Detta kan användas till att uppskatta serier med integraler.

Lösning



Lösning

Lösning

$f(t) = 1/t^2$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$.

Lösning

$f(t) = 1/t^2$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^T = 1.$$

Lösning

$f(t) = 1/t^2$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^T = 1.$$

$$1 = \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt \le \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$$

Lösning

$f(t) = 1/t^2$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^T = 1.$$

$$1 = \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2}$$

Lösning

$f(t) = 1/t^2$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^T = 1.$$

$$1 = \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$$

Lösning

$f(t) = 1/t^2$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^T = 1.$$

$$1 = \int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = 1 + 1 = 2.$$