Exempel

Ange ett rationellt tal som approximerar integralen

$$\int_0^{1/4} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} dx$$

med ett fel som till beloppet är mindre än $1/4000$.

Taylors sats med Lagranges restterm

Taylors sats med Lagranges restterm

Sats

Antag att $f(x)$ är definierad och har kontinuerliga derivator upp till och med ordning $n+1$ i någon omgivning till punkten $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för någon punkt ξ mellan x och a.

Lösning

Lösning

Maclaurinutveckling med restterm på Lagranges form ger:

$$f(t) = \mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{\mathrm{e}^{\xi} t^4}{24}.$$

Lösning

Maclaurinutveckling med restterm på Lagranges form ger:

$$f(t) = \mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{\mathrm{e}^{\xi} t^4}{24}.$$

Här ligger ξ mellan 0 och t (och beror på t).

Lösning

Maclaurinutveckling med restterm på Lagranges form ger:

$$f(t) = \mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{\mathrm{e}^{\xi} t^4}{24}.$$

Här ligger ξ mellan 0 och t (och beror på t).
Vi får (med $t = -\sqrt{x}$):

Lösning

Maclaurinutveckling med restterm på Lagranges form ger:

$$f(t) = \mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{\mathrm{e}^\xi t^4}{24}.$$

Här ligger ξ mellan 0 och t (och beror på t).
Vi får (med $t = -\sqrt{x}$):

$$\int_0^{1/4} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} dx \approx \int_0^{1/4} \left(1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{x}}{6}\right) dx =$$

Lösning

Maclaurinutveckling med restterm på Lagranges form ger:

$$f(t) = \mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{\mathrm{e}^{\xi} t^4}{24}.$$

Här ligger ξ mellan 0 och t (och beror på t).
Vi får (med $t = -\sqrt{x}$):

$$\int_0^{1/4} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} dx \approx \int_0^{1/4} \left(1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{x}}{6}\right) dx =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{64} - \frac{1}{480} = \frac{173}{960}.$$

Felet i denna approximation ges av:

Felet i denna approximation ges av:

$$\int_0^{1/4} \frac{\mathrm{e}^{\xi} x^2}{24} dx,$$

Felet i denna approximation ges av:

$$\int_0^{1/4} \frac{\mathrm{e}^{\xi} x^2}{24} dx,$$

Eftersom ξ ligger mellan $-\sqrt{x}$ och 0 gäller

$$\mathrm{e}^{\xi} \leq \mathrm{e}^{0} = 1,$$

Felet i denna approximation ges av:

$$\int_0^{1/4} \frac{\mathrm{e}^{\xi} x^2}{24} dx,$$

Eftersom ξ ligger mellan $-\sqrt{x}$ och 0 gäller

$$\mathrm{e}^{\xi} \leq \mathrm{e}^{0} = 1,$$

så

$$0 \leq \int_0^{1/4} \frac{\mathrm{e}^{\xi} x^2}{24} dx \leq \int_0^{1/4} \frac{x^2}{24} dx = \frac{1}{4068} < \frac{1}{4000}.$$