Exempel

Bestäm en rationell approximation till talet $\mathrm{e}^{1/5}$ som har ett fel vars absolutbelopp är högst 10^{-5}.
Approximationen får skrivas som en summa av ändligt många rationella tal.

Taylors sats med Lagranges restterm

Sats

Antag att $f(x)$ är definierad och har kontinuerliga derivator upp till och med ordning $n+1$ i någon omgivning till punkten $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\dots\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för någon punkt ξ mellan x och a.

Lösning

Lösning

Låt $f(x) = e^x$.

Lösning

Låt $f(x) = e^x$.
Då är $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla positiva heltal n.

Lösning

Låt $f(x) = e^x$.
Då är $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla positiva heltal n.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5$$

Lösning

Låt $f(x) = e^x$.
Då är $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla positiva heltal n.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \ldots \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^\xi}{5!}x^5,
\end{aligned}
$$

där ξ ligger mellan 0 och x.

Lösning

Låt $f(x) = e^x$.
Då är $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla positiva heltal n.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \ldots \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^{\xi}}{5!}x^5,
\end{aligned}
$$

där ξ ligger mellan 0 och x.
Vi vill approximera $e^{1/5}$, så

$$
e^{1/5} = f(1/5) = \underbrace{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{6 \cdot 5^3} + \frac{1}{24 \cdot 5^4}}_{\text{approximation}} + \underbrace{\frac{e^{\xi}}{120 \cdot 5^5}}_{\text{fel}},
$$

där ξ ligger mellan 0 och $1/5$.

Lösning

Eftersom $e^{\xi} \leq e^{1/5} < e^{1} < 3$ så är

$$\left| \frac{e^{\xi}}{120 \cdot 5^5} \right| < \frac{3}{3 \cdot 5^3 \cdot 10^3} = \frac{1}{125000} < 10^{-5},$$

så är det absoluta felet $< 10^{-5}$.

Svar: $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{6 \cdot 5^3} + \frac{1}{24 \cdot 5^4}$.

Alternativ 2:

Ta fram generell utveckling

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

där ξ ligger mellan 0 och x.

Alternativ 2:

Ta fram generell utveckling

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

där ξ ligger mellan 0 och x.
Feluppskattning

$$\left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{3}{(n+1)!5^{n+1}}.$$

Alternativ 2:

Ta fram generell utveckling

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

där ξ ligger mellan 0 och x.
Feluppskattning

$$\left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!5^{n+1}}.$$

Testar vi nu får vi att $n = 4$ räcker ...