Numeriska serier

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Positiva serier

Positiva serier

En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ där alla termer $a_k \geq 0$ kallas positiv.

Positiva serier

En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ där alla termer $a_k \geq 0$ kallas positiv.

Sats (Jämförelsekriteriet)

Om $0 \leq a_k \leq b_k$ så gäller att:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \;\textit{konvergent}\; \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \;\textit{konvergent}$$

och

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Positiva serier

En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ där alla termer $a_k \geq 0$ kallas positiv.

Sats (Jämförelsekriteriet)

Om $0 \leq a_k \leq b_k$ *så gäller att:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{konvergent} \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{konvergent}$$

och

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{divergent} \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{divergent}.$$

Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform

Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform

Sats (Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform)

Om $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ *och*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$

då gäller att antingen är båda serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *och* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergenta eller divergenta.*

Cauchy's integralkriterium

Sats (Cauchys integralkriterium)

Om funktionen $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ *är avtagande så är serien* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *och integralen* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *antingen båda konvergenta eller divergenta.*

Jämförelseserier

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

konvergerar om och endast om $\alpha > 1$.

Jämförelseserier

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

konvergerar om och endast om $\alpha > 1$.
(Notera här t.ex. med $\alpha = 1$ att termerna går mot noll, men serien är ändå divergent!)