# Ordokalkyl

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

# Taylors sats med ordorestterm

**Sats**

*Antag att $f(x)$ är definierad och har kontinuerliga derivator upp till och med ordning $n+1$ i någon omgivning till punkten $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right),$$

*där $\mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right) = b(x)(x-a)^{n+1}$ för någon funktion $b(x)$ som är definierad och begränsad i någon omgivning till $a$.*

### Definition

Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till $a$ sådan att $f(x) = b(x)g(x)$.

# Ordokalkyl

## Definition

Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till $a$ sådan att $f(x) = b(x)g(x)$.

Ofta är $a$ underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs.

### Definition

Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till $a$ sådan att $f(x) = b(x)g(x)$.

Ofta är $a$ underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs.

$$\mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) = \mathcal{O}(x^5) :$$

### Definition

Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till $a$ sådan att $f(x) = b(x)g(x)$.

Ofta är $a$ underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs.

$$\mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) = \mathcal{O}(x^5):$$

$$b_1(x)x^5 + b_2(x)x^7 = (b_1(x) + b_2(x)x^2))x^5.$$

## Definition

Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till $a$ sådan att $f(x) = b(x)g(x)$.

Ofta är $a$ underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs.

$$\mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) = \mathcal{O}(x^5) :$$

$$b_1(x)x^5 + b_2(x)x^7 = (b_1(x) + b_2(x)x^2))x^5.$$

$$\mathcal{O}(x^5 + x^8) = \mathcal{O}(x^5) :$$

## Definition

Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till $a$ sådan att $f(x) = b(x)g(x)$.

Ofta är $a$ underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs.

$$\mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) = \mathcal{O}(x^5):$$

$$b_1(x)x^5 + b_2(x)x^7 = (b_1(x) + b_2(x)x^2))x^5.$$

$$\mathcal{O}(x^5 + x^8) = \mathcal{O}(x^5):$$

$$b(x)(x^5 + x^8) = (b(x)(1 + x^3))x^5.$$

# Några varningar

# Några varningar

- När vi jobbar med stora ordo blir likhetstecknet i princip ENKELRIKTAT, där vi får gå från "bättre" till "sämre" i höger-riktningen.

# Några varningar

- När vi jobbar med stora ordo blir likhetstecknet i princip ENKELRIKTAT, där vi får gå från "bättre" till "sämre" i höger-riktningen.
- T.ex. $\mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2)$ , men $\mathcal{O}(x^2) \neq \mathcal{O}(x^3)$.

# Några varningar

- När vi jobbar med stora ordo blir likhetstecknet i princip ENKELRIKTAT, där vi får gå från "bättre" till "sämre" i höger-riktningen.
- T.ex. $\mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2)$ , men $\mathcal{O}(x^2) \neq \mathcal{O}(x^3)$.
- Notera att t.ex. $(x-1)^2$ inte går mot noll då $x \to 0$, så då $x \to 0$ betecknar $\mathcal{O}((x-1)^2)$ bara en begränsad funktion!

# Entydighetssatsen för Taylorutvecklingar

**Sats**

*Om $q(x)$ är ett polynom av högst grad $n$ sådant att $f(x) - q(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$, då är $q(x) = p_n(x)$ Taylorpolynomet av ordning $n$ till $f$ i $a$.*