Exempel

Hitta lösningen till $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$ som uppfyller bivillkoren $y(0) = A$, $y'(0) = B$. För full poäng ska svaret ges dels i form av en potensserie, dels som en ändlig kombination av elementära funktioner.

Lösning

Ansätt $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < R$, där konvergensradien R ännu är okänd.

Lösning

Ansätt $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < R$, där konvergensradien R ännu är okänd.

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

Lösning

Ansätt $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < R$, där konvergensradien R ännu är okänd.

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k$$

för $|x| < R$.

Lösning

Ansätt $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < R$, där konvergensradien R ännu är okänd.

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k$$

för $|x| < R$.

Lösning

Alltså får vi

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + \\
&+4\sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big((k^2+3k+2)c_{k+2} + (k^2+3k+2)c_k\Big)x^k = 0. \qquad |x| < R,
\end{aligned}
$$

Lösning

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((k^2+3k+2)c_{k+2}+(k^2+3k+2)c_k\Big)x^k=0.$$

Lösning

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((k^2+3k+2)c_{k+2}+(k^2+3k+2)c_k\Big)x^k=0.$$

Entydighet hos koefficienterna innebär att

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)y''+4xy'+2y=0\\
\Leftrightarrow\quad &(k^2+3k+2)c_{k+2}+(k^2+3k+2)c_k=0,\quad k=0,1,2,\dots\\
\Leftrightarrow\quad &c_{k+2}=-c_k,\quad k=0,1,2,\dots
\end{aligned}$$

Lösning

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((k^2+3k+2)c_{k+2}+(k^2+3k+2)c_k\Big)x^k=0.$$

Entydighet hos koefficienterna innebär att

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)y''+4xy'+2y=0\\
\Leftrightarrow\quad &(k^2+3k+2)c_{k+2}+(k^2+3k+2)c_k=0,\quad k=0,1,2,\dots\\
\Leftrightarrow\quad &c_{k+2}=-c_k,\quad k=0,1,2,\dots
\end{aligned}$$

Bivillkoren $y(0)=A$ och $y'(0)=B$ ger $c_0=A$ och $c_1=B$,

Lösning

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((k^2+3k+2)c_{k+2}+(k^2+3k+2)c_k\Big)x^k=0.$$

Entydighet hos koefficienterna innebär att

$$\begin{aligned}&(1+x^2)y''+4xy'+2y=0\\ \Leftrightarrow\quad &(k^2+3k+2)c_{k+2}+(k^2+3k+2)c_k=0,\quad k=0,1,2,\ldots\\ \Leftrightarrow\quad &c_{k+2}=-c_k,\quad k=0,1,2,\ldots\end{aligned}$$

Bivillkoren $y(0)=A$ och $y'(0)=B$ ger $c_0=A$ och $c_1=B$,och formeln för koefficienterna ovan ger därför att

$$c_0=A,\ c_2=-A,\ c_4=A,\ c_6=-A,\ \ldots \text{ och } c_1=B,\ c_3=-B,\ c_5=B,$$

Lösning

Så

$$
\begin{aligned}
y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m}}_{\text{Jämna index}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} x^{2m+1}}_{\text{Udda index}} \\
&= A \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} + B \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m+1} \\
&= (A + Bx) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} \\
&= (A + Bx) \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{A + Bx}{1 + x^2}, \qquad |x| < 1,
\end{aligned}
$$

Lösning

Så

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m}x^{2m}}_{\text{Jämna index}}+\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m+1}x^{2m+1}}_{\text{Udda index}}$$

$$=A\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mx^{2m}+B\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mx^{2m+1}$$

$$=(A+Bx)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mx^{2m}$$

$$=(A+Bx)\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{A+Bx}{1+x^2},\qquad |x|<1,$$

d.v.s. $R=1$, eftersom $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mx^{2m}$ är en geometrisk serie med kvot $q=-x^2$.

Svar: $y=A\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mx^{2m}+B\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mx^{2m+1}=\frac{A+Bx}{1+x^2}$, $|x|<1$.