Potensserier

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Potensserier

En potensserie är en serie (funktion) på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

där c_n är konstanter och x en variabel (så för varje fixt x vi sätter in får vi en numerisk serie).

Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vara en numerisk serie.

Sats (Rotkriteriet)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

är absolutkonvergent om

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

och divergent om

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

Kvotkriteriet

Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vara en numerisk serie.

Sats (Kvotkriteriet)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent om

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

och divergent om

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.$$

Både rot- och kvotkriteriet bygger på jämförelse med geometrisk serie, så det är ganska grova testverktyg, men de är väl lämpade för att behandla potensserier.
Notera också att inget av dessa säger något om fallet då vi får gränsvärde 1.

Konvergensradie

Till varje potensserie finns ett unikt tal R ($0 \leq R \leq \infty$) sådant att serien är absolutkonvergent om $|x| < R$, och divergent om $|x| > R$. $|x| = R$ måste behandlas från fall till fall.

Termvis derivation och integration av potensserier

Sats

Antag att $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *har konvergensradie* $R > 0$. *Då har* f *derivator av godtycklig ordning på* $]-R, R[$, *och vi har:*

- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$,
- $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$,
- $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Alla potensserier ovan har konvergensradie R.