Exempel

För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{3k}}{8^k \ln k}$?

Lösning

Lösning

Vi börjar med att bestämma konvergensradien R.

Lösning

Vi börjar med att bestämma konvergensradien R.
Alternativ 1, rotkriteriet:

Lösning

Vi börjar med att bestämma konvergensradien R.
Alternativ 1, rotkriteriet:

$$\left|\frac{x^{3k}}{8^k \ln k}\right|^{1/k} = \left(\frac{|x|}{2}\right)^3 e^{-\frac{1}{k}\ln\ln k} \to \left(\frac{|x|}{2}\right)^3, \quad \text{då } k \to \infty.$$

Lösning

Vi börjar med att bestämma konvergensradien R.
Alternativ 1, rotkriteriet:

$$\left|\frac{x^{3k}}{8^k \ln k}\right|^{1/k} = \left(\frac{|x|}{2}\right)^3 e^{-\frac{1}{k}\ln\ln k} \to \left(\frac{|x|}{2}\right)^3, \quad \text{då } k \to \infty.$$

Så serien är absolutkonvergent enligt rotkriteriet då

$$\left(\frac{|x|}{2}\right)^3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$$

och divergent om $x > 2$ eller $x < -2$.

Alternativ 2: Kvotkriteriet

Alternativ 2, kvotkriteriet:

Alternativ 2, kvotkriteriet:

$$\left| \frac{\frac{x^{3(k+1)}}{8^{k+1}\ln(k+1)}}{\frac{x^{3k}}{8^k \ln k}} \right| = \frac{|x|^3}{8} \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \to \left(\frac{|x|}{2}\right)^3, \quad \text{då } k \to \infty.$$

Alternativ 2: Kvotkriteriet

Alternativ 2, kvotkriteriet:

$$\left|\frac{\frac{x^{3(k+1)}}{8^{k+1}\ln(k+1)}}{\frac{x^{3k}}{8^k \ln k}}\right| = \frac{|x|^3}{8}\frac{\ln k}{\ln(k+1)} \to \left(\frac{|x|}{2}\right)^3, \quad \text{då } k \to \infty.$$

Så serien är absolutkonvergent enligt kvotkriteriet då

$$\left(\frac{|x|}{2}\right)^3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$$

och divergent om $x > 2$ eller $x < -2$.

$x = 2:$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}.$$

$x = 2:$
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}.$$
Denna är divergent eftersom $\ln k \leq k$ och den harmoniska serien är divergent.
$x = -2:$
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}.$$

$x = 2:$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}.$$

Denna är divergent eftersom $\ln k \leq k$ och den harmoniska serien är divergent.

$x = -2:$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}.$$

Eftersom termernas belopp i denna serie avtar mot noll, dvs $1/\ln(k+1) < 1/\ln k$ och $1/\ln k \to 0$, samt att serien är alternerande, följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

$x = 2:$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}.$$

Denna är divergent eftersom $\ln k \leq k$ och den harmoniska serien är divergent.

$x = -2:$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}.$$

Eftersom termernas belopp i denna serie avtar mot noll, dvs $1/\ln(k+1) < 1/\ln k$ och $1/\ln k \to 0$, samt att serien är alternerande, följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

Svar: $-2 \leq x < 2$.