Exempel

Avgör om

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right)$$

är konvergent.

Lösning

Vi har

$$0 \leq \left|(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right) \text{ då } 1 < k < \infty.$$

Lösning

Vi har

$$0 \leq \left|(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right) \text{ då } 1 < k < \infty.$$

$$\ln(1+1/k^5) = 1/k^5 + \mathcal{O}((1/k^5)^2) \text{ då } k \to \infty.$$

Lösning

Vi har

$$0 \leq \left|(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right) \text{ då } 1 < k < \infty.$$

$$\ln(1+1/k^5) = 1/k^5 + \mathcal{O}((1/k^5)^2) \text{ då } k \to \infty.$$

Vi jämför med

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$$

som är konvergent.

Lösning

Vi har

$$0 \leq \left|(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{1}{k^5}\right) \text{ då } 1 < k < \infty.$$

$$\ln(1+1/k^5) = 1/k^5 + \mathcal{O}((1/k^5)^2) \text{ då } k \to \infty.$$

Vi jämför med

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$$

som är konvergent.

Eftersom

$$0 < \lim_{k \to \infty} \frac{\ln(1 + 1/k^5)}{1/k^5} = 1 < \infty,$$

så följer från jämförelseprincipen på gränsvärdesform att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k^5}\right) \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^5}\right)$$

är konvergent.

Eftersom

$$0 < \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1 + 1/k^5\right)}{1/k^5} = 1 < \infty,$$

så följer från jämförelseprincipen på gränsvärdesform att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k^5}\right) \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^5}\right)$$

är konvergent.
Alltså är serien absolutkonvergent och därmed konvergent.