Tenta TATA43/9GMA08, 2024/05/31

Lösningsförslag

(1) Successiv integration ger: $f(x,y,z) = e^x y^2 - zx + g(y,z)$, insatt i den 2:a ekvationen: $f'_y(x,y,z) = 2e^x y + g'_y(y,z) \overset{!}{=} 2ye^x + 2y\cos z$

$\Leftrightarrow \quad g'_y(y,z) = 2y\cos z \Leftrightarrow g(y,z) = y^2\cos z + h(z)$, vilket ger

$f(x,y,z) = e^x y^2 - zx + y^2\cos z + h(z)$. Insatt i den 3:e ekvationen

ger: $f'_z(x,y,z) = -x - y^2\sin z + h'(z) \overset{!}{=} -x - y^2\sin z \Leftrightarrow h'(z) = 0$,

d.v.s $h = C \in \mathbb{R}$.

Svar $f(x,y,z) = e^x y^2 - zx + y^2\cos z + C$, där $C \in \mathbb{R}$.

---

(2) a) $f(x,y,z) = 2x^2 + yz$, $\Pi: 4x+y+z = 6$ tangerar en nivåyta $f = C$ medför att $\nabla f(\bar{a}) \parallel (4,1,1)$ i tangeringspunkt $\bar{a} = (a,b,c)$, alltså $(4a, c, b) \parallel (4,1,1) \Leftrightarrow (4a,c,b)\times(4,1,1) = \bar{0}$

$\Leftrightarrow 4a - 4c = c - b = 4b - 4a = 0$, vilket ger $\begin{cases} a = c \\ b = c \\ c = c \end{cases}$, och

insatt i $4x+y+z = 6$ ger $4c + c + c = 6 \Leftrightarrow c = 1$

$\Rightarrow$ tangeringspunkten har koordinater $\bar{a} = (1,1,1) \Rightarrow$

$C = f(\bar{a}) = 3$

Svar: nivåytan med $C = 3$

b) Maclaurinsutvecklingar kring $(x,y) = (0,0)$:

- $e^{xy} = 1 + \frac{xy}{1!} + O(x^2y^2) = 1 + xy + O(\rho^4)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(\rho^4)$,
- $\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(\rho^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + O(\rho^4)$
- $(\cos x)^{e^{xy}} = \exp\left[e^{xy}\cdot\ln(\cos x)\right] = \exp\left[\left(1+xy+O(\rho^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + O(\rho^4)\right)\right]$

$= \exp\left[-\frac{x^2}{2} + O(\rho^4)\right] = 1 - \frac{x^2}{2} + O(\rho^4)$

Svar: $1 - \frac{x^2}{2} + O(\rho^4)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.

③ Kedjeregeln ger: $z'_x = z'_u$ och $z'_y = z'_u \cdot 2y + z'_v$,

$z''_{xx} = (z'_u)'_u = z''_{uu}$, $z''_{xy} = (z'_u)'_u\, 2y + (z'_u)'_v = 2y\, z''_{uu} + z''_{uv}$,

och $z''_{yy} = (z'_u)'_y \cdot 2y + 2z'_u + (z'_v)'_y = (2y)^2 z''_{uu} + z''_{uv} \cdot 2y + 2z'_u +$

$+\, 2y\, z''_{uv} + z''_{vv} = 4y^2 z''_{uu} + 4y\, z''_{uv} + z''_{vv} + 2z'_u$.

Insatt i PDE:

$$4y^2 \cancel{z''_{uu}} - 4y(\cancel{2y z''_{uu}} + \cancel{z''_{uv}}) + \cancel{4y^2 z''_{uu}} + \cancel{4y\, z''_{uv}} + z''_{vv} + \cancel{2z'_u} - \cancel{2z'_u} = 6y$$

$\iff \quad z''_{vv} = 6y \iff z''_{vv} = 6v \iff z'_v = 3v^2 + g(u) \iff$

$\Rightarrow \quad z(u,v) = v^3 + g(u)\,v + h(u)$, alltså $z(x,y) = y^3 + y\, g(x+y^2) + h(x+y^2)$.

- Bivillkoret $z(x,0) = x^2 \Rightarrow h(x) = x^2 \Rightarrow z(x,y) = y^3 + y\, g(x+y^2) + (x+y^2)^2$
- Bivillkoret $z'_y(x,0) = \sin x \Rightarrow$

$$z'_y(x,y) = 3y^2 + g(x+y^2) + 2y^2 g'(x+y^2) + 2(x+y^2)\cdot 2y$$

$z'_y(x,0) = g(x) = \sin x$, alltså

Svar: $z(x,y) = y^3 + y \sin(x+y^2) + (x+y^2)^2$.

---

④ Stationära punkter:
$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 2z - 2y = 0 & (1) \\ f'_y = 3y^2 - 2x - 2z = 0 & (2) \\ f'_z = 3z^2 - 2x - 2y = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) − (2) ger $3(x^2 - y^2) + 2(x-y) = (x-y)(3x+3y+2) = 0$ som ger antingen a) $x = y$ eller b) $3x + 3y + 2 = 0$. Men eftersom (3) ger $x + y = \frac{3z^2}{2} \Rightarrow x + y \geq 0 \Rightarrow 3x + 3y + 2 \geq 2 \Rightarrow$ b) har ingen lösning.

Alltså $x = y$. På samma sätt får vi $y = z$, $z = x$, d.v.s (t,t,t), insatt i (1) − (3) ger $t(3t-4) = 0$ etc., d.v.s $(0,0,0)$ och $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ är de stationära punkterna.

Andra derivator: $f''_{xx} = 6x$, $f''_{yy} = 6y$, $f''_{zz} = 6z$, $f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{yz} = -2$.

Punkt $(0,0,0)$: $Q_{(0,0,0)}(h,k,l) = -4hk - 4kl - 4lh$ är indefinit, ty

$Q(1,1,0) = -4 < 0$, $Q(1,-1,0) = 4 > 0$. $\Rightarrow$ ingen extrempunkt.

Punkten $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$: $Q(h,k,\ell) = 8h^2+8k^2+8\ell^2-4hk-4k\ell-4\ell h =$
$= 8\left(h-\frac{k}{4}-\frac{\ell}{4}\right)^2 + \frac{15}{2}\left(k-\frac{\ell}{3}\right)^2+\frac{20}{3}\ell^2$, så $Q(h,k,\ell)\geq 0$ och $Q=0$
$\Leftrightarrow (h=k=\ell=0)$, alltså positivt definit, och punkten $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ är därmed en minimipunkt.

Svar: $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ är minimipunkt, maximipunkter saknas

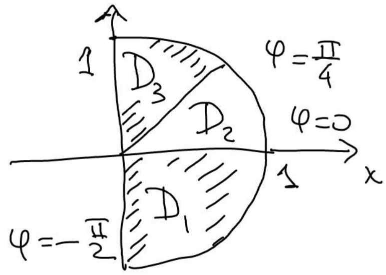
---

(5) Linjerna $y=0$ och $y=x$ delar in halvcirkelskivan D i tre delar:

$D_1 = \{(x,y)\in D : y\leq 0\}$

$D_2 = \{(x,y)\in D: 0<y<x\}$

$D_3 = \{(x,y)\in D: x\leq y\}$



där $y^2-xy = y(y-x)\geq 0$ om $(x,y)\in D_1\cup D_3$ medan $y^2-xy<0$ i D_2
Alltså får vi m.h.a. polära koordinater $(y^2-xy=\rho^2(\sin^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi))$

$$\iint_D \max(0;\,y^2-xy)\,dxdy = \iint_{D_1\cup D_3}(y^2-xy)\,dxdy + \iint_{D_2} 0\,dxdy =$$

$$= \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\int_{\rho=0}^{1}(\sin^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\rho^2\cdot\rho\,d\rho\right)d\varphi + \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\rho=0}^{1}(\sin^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\rho^2\cdot\rho\,d\rho\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\left[G(\varphi)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{4}\left[G(\varphi)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} =,$$ där $G(\varphi)=\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\sin^2\varphi$
(en primitiv funktion till $\sin^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi$)

$$= \frac{1}{4}\left(0-0-0-\left(-\frac{\pi}{4}-0-\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{4}-0-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{8}+\frac{3\pi}{32}$$

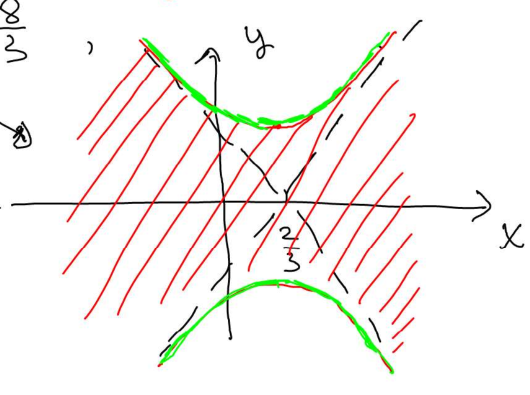
Svar: $1/8 + 3\pi/32$

---

(6) $f = x^2+y^2+z^2$ är kontinuerlig, men området $D=\{(x,y,z): z^2\geq x^2+y^2,$ $h = 2x+z=2\}$ är obegränsat: $z=2-2x$ insatt i $g := z^2-x^2-y^2\geq 0$ ger

$3x^2-4x-y^2\geq -4 \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-y^2\geq -\frac{8}{3}$,

se D's projektion på (x,y)-planet



Eftersom målfunktionen $f(x,y,z)$ är avståndet i kvadrat, är $f(x,y,z)$ obegränsad i D, d.v.s. f_{max} existerar inte.

Å andra sidan är D en sluten mängd, och $f(x,y,z) \geq 0$ alltså f_{min} existerar och icke-negativt (T.ex. eftersom skärningen mellan D och ett tillräckligt stort klot $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ är en icke-tom kompakt mängd K och $f(x,y,z)$ är stor på $D \setminus K$).
De punkter där minsta värde antas fås nu med kandidatjakt.

• (2D) $g>0$, $h=2$ (yta): ger $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow \nabla f \times \nabla h = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 4z-2x \\ -4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2x+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2z \\ 5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\tfrac{4}{5}; 0; \tfrac{2}{5}\right).$$

och $g\left(4/5, 0, 2/5\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 < 0 \Rightarrow$ inga kandidater här

• (1D) $g=0$, $h=2$ (kurva) ger $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ linjärt beroende

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -2x & -2y & 2z \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 2z \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4zy = 0$$

$\Leftrightarrow z=0$ eller $y=0$

a) $z=0$ insatt i $g=0$, $h=2$ ger

$$\begin{cases} 2x=2 \\ 0=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \text{inga lösningar}$$

b) $y=0$ insatt i $g=0$, $h=2$ ger $\begin{cases} z^2=x^2 \\ 2x+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

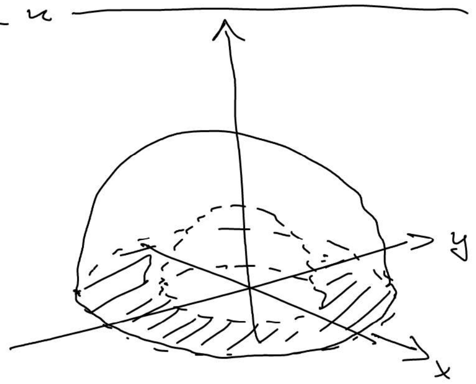
antingen $\begin{cases} z=x \\ 3x=2 \end{cases}$, $\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$ eller $\begin{cases} z=-x \\ x=2 \end{cases}$, $(2; 0; -2)$

$$f\left(\tfrac{2}{3}; 0; \tfrac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}, \quad f(2; 0; -2) = 8 \Rightarrow f_{min} = \frac{8}{9}$$

Svar: $f_{min} = f\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}\right) = 8/9$, f_{max} saknas

---

7) I rymdpolära koordinater ges D av



$$0 < b \leq r \leq a$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

z-axel är symmetriaxeln $\Rightarrow x_T = y_T = 0$.

Beräknar z_T :

$$z_T = \frac{1}{M} \iiint_D z\,dx\,dy\,dz \quad , \text{där}$$

- $M = \iiint_D dx\,dy\,dz = \text{Vol}(D) = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}a^3 - \frac{4\pi}{3}b^3\right)$

- $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_b^a (r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta \cdot dr\,d\theta\,d\varphi =$

$$= 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_b^a \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\left[a^4 - b^4\right]$$

Alltså

$$z_T = \frac{\frac{\pi}{4}(a^4 - b^4)}{\frac{4\pi}{6}(a^3 - b^3)} = \frac{3}{8}\left(\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}\right) = \frac{3}{8}\,\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} =$$

$$z_T = \frac{3}{8}\cdot\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}$$

$$\lim_{b\to 0^+} z_T = \frac{3}{8}\,\frac{a^3}{a^2} = \frac{3}{8}a \quad , \quad \lim_{b\to a} z_T = \frac{3\cdot 2a\cdot 2a^2}{8\cdot 3a^2} = \frac{a}{2}$$

Svar: Tyngdpunkten $= \left(0;0;\ \frac{3}{8}\cdot\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}\right) =: P$

$$\lim_{b\to 0} P = \left(0;0;\ \frac{3}{8}a\right) \quad , \quad \lim_{b\to a} P = \left(0;0;\ \frac{a}{2}\right)$$