TATA43 / 2025-01-07 / Lösningsförslag

① a) $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ är en C^1-funktion, $F(1,2,2)=5$,

och $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2,2)=(3y^2-3xz)\Big|_{(1,2,2)}=12-6\neq 0$, alltså definierar

$x^3+y^3+z^3-3xyz=5$ en C^1-funktion $y=y(x,z)$ lokalt kring $(1,2,2)$

b) $F(1,2,2)=5 \Rightarrow y(1,2)=2$, och implicitderivering ger

- $3x^2+3y^2y'_x-3yz-3xzy'_x=0 \Rightarrow y'_x=\dfrac{x^2-yz}{xz-y^2} \Rightarrow y'_x(1,2)=\dfrac{1-4}{-2}=\dfrac{3}{2}$
- $3z^2+3y^2y'_z-3xy-3xzy'_z=0 \Rightarrow y'_z=\dfrac{z^2-yx}{xz-y^2} \Rightarrow y'_z(1,2)=\dfrac{4-2}{-2}=-1$

Svar: a) se ovan b) $y(1,2)=2$, $y'_x(1,2)=3/2$, $y'_z(1,2)=-1$

② a) $\sin(2x-y)=(2x-y)+O((2x-y)^3)=2x-y+O(\rho^3)$

$e^{x+2y}=1+(x+2y)+\frac{1}{2}(x+2y)^2+O(\rho^3)$

$\Rightarrow \sin(2x-y)e^{x+2y}=\underline{(2x-y)+(2x-y)(x+2y)+O(\rho^3)}$

$(1-4x)^{1/2}+\ln(1+y)=\underline{1+\frac{1}{2}(-4x)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(-4x)^2+y-\frac{y^2}{2}+O(\rho^3)}$

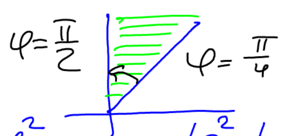
vilket ger:

$f(x,y)=1+3xy-\frac{5y^2}{2}+O(\rho^3)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$ Taylorpolynomet $=1+3xy-\frac{5y^2}{2}$

b) Taylorutvecklingen medför att $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0 \Rightarrow$ origo är en stationär punkt samt $Q_{(0,0)}(h,k)=3hk-\frac{5k^2}{2}$ är indefinit ty $Q_{(0,0)}(1,1)=\frac{1}{2}>0$, $Q_{(0,0)}(0,1)=-\frac{5}{2}<0 \Rightarrow$ är origo ingen extrempunkt.

Svar: a) Taylorpolynomet $=1+3xy-\frac{5y^2}{2}$, b) en saddelpunkt.

③ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq x\}$ är inte kompakt område $\Rightarrow$ integralen är generaliserad. Integranden $y^2e^{-x^2-y^2}\geq 0$ i $D \Rightarrow$ kan vi tillämpa Fubinis sats och får (m.h.a planpolära koordinater):



$$\iint_D y^2e^{-x^2-y^2}\,dxdy=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\infty}(\rho\sin\varphi)^2e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\infty}\rho^3e^{-\rho^2}d\rho=\Big/\rho^2=t\Big/$$

$$=\left[\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\cdot\int_0^{\infty}\frac{1}{2}te^{-t}dt=\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\left[-te^{-t}-e^{-t}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi+2}{16}$$

Svar: $\frac{\pi+2}{16}$ (generaliserad)

④ m.h.a. $u = x,\; v = xy$ ger

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u + z'_v\, y$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = x\, z'_v$$

$$z''_{xy} = (z'_u + z'_v y)'_y = (z'_u)'_y + z'_v + y (z'_v)'_y = x z''_{uv} + z'_v + xy z''_{vv}$$

$$z''_{yy} = x^2 z''_{vv} \quad \implies$$

$$y z''_{yy} - x z''_{xy} + z'_y = \cancel{y x^2 z''_{vv}} - x^2 z''_{uv} - \cancel{x z'_v} - \cancel{x^2 y z''_{vv}} + \cancel{x z'_v} = -x^2 z''_{uv} = 1$$

$\iff$ (Obs. $x \neq 0$) $\quad z''_{uv} = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{u^2} \implies z'_v = \frac{1}{u} + g(v) \implies$

$$\implies \quad z = \frac{v}{u} + G(v) + H(u) = \frac{xy}{x} + G(xy) + H(x) = y + G(xy) + H(x)$$

Bivillkoren: $\quad z(1,y) = y + G(y) + H(1) = 2y, \quad G(y) = y - H(1) \quad (*)$

$z(x,0) = x - 1 \iff 0 + G(0) + H(x) = x - 1 \implies H(x) = x - 1 - G(0)$

där $G(0) =$ /m.h.a. $(*)$/ $= -H(1) \implies H(x) = x - 1 + H(1)$

Därmed får man: $\quad z = y + xy - H(1) + x - 1 + H(1) = y + x + xy - 1$

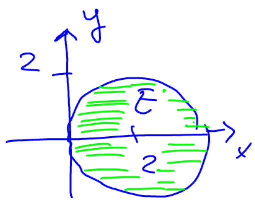
Svar: $\quad z(x,y) = y + x + xy - 1$

---

⑤ D ges av $\quad -(x^2+y^2) \le z \le x^2+y^2$ över $E = \{x^2 - 4x + y^2 \le 0\}$

där $(x-2)^2 + y^2 \le 4 \implies$ integrering m.h.a. stavar i z-led ger

$$V(D) = \iint_E \left(\int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 1\, dz \right) dx\,dy = \iint_E 2(x^2+y^2)\, dx\,dy \;(=)$$



$$E: \begin{cases} x = 2 + \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 2 \end{matrix} \; : \; x^2+y^2 = 4 + \rho^2 + 4\rho\cos\varphi$$

$$(=)\; 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 + \rho^2 + 4\rho\cos\varphi)\cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = 4\pi \int_0^2 (4\rho + \rho^3)\, d\rho = 4\pi\left[2\rho^2 + \frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 48\pi$$

Svar: Vol $= 48\pi$

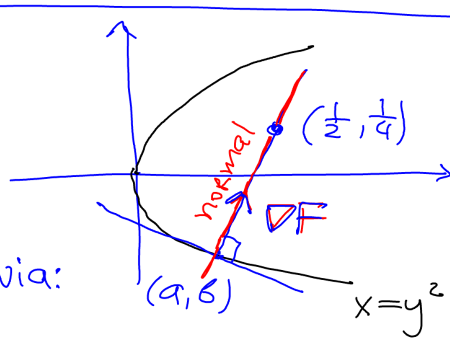
---

⑥ Låt $F(x,y) = x - y^2$, då blir $x = y^2$

0-nivå kurvan för F: $F(x,y) = 0$, alltså

blir $\nabla F(a,b) = (1, -2b)$ en normalvector i (a,b).

Normallinjeekvation fås på parameterform via:



$$(x,y) = (a,b) + t\cdot(1,-2b) = (a+t,\ b-2bt) = \Big/ \begin{matrix} \text{m.h.a.} \\ a=b^2 \end{matrix} \Big/ = (b^2+t,\ b(1-2t))$$

Insättning av $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ger $\begin{cases} b^2+t = \frac{1}{2} \\ b-2bt = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2b \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 2b^3+b = b+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\ b^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$, alltså $a = b^2 = \frac{1}{4}$, d.v.s. finns bara en lösning $(a,b) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Motsvarande normallinjeekvation fås via

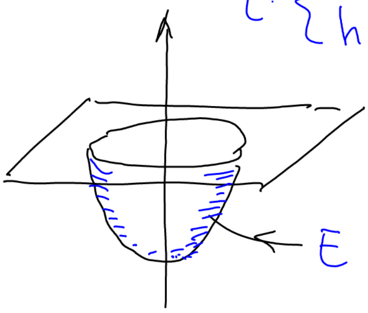
$$\begin{cases} x = b^2+t = \frac{1}{4}+t \\ y = b(1-2t) = \frac{1}{2}-t \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{x+y = \frac{3}{4}}$$

Svar: $P(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ och $x+y = \frac{3}{4}$

---

7) $f(x,y,z) = y^2+xz-2x$, $g(x,y,z) = x^2+y^2-z \leq 10$ och $h(x,y,z) = z \leq -2$

Mängden $E: \begin{cases} g \leq 10 \\ h \leq -2 \end{cases}$ ger $x^2+y^2-10 \leq z \leq -2$: begränsad och sluten



$\Rightarrow$ kompakt, $f(x,y,z)$ är kontinuerlig

$\Rightarrow$ både största och minsta värde finns.

Vi betraktar 4 delfall (kandidatjakt):

I) $g<10, h<-2$ II) $g=10, h<-2$ III) $g<10, h=-2$

IV) $g=10, h=-2$:

I) 3D $(g<10, h<-2)$: ger $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-2=0 \\ 2y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,2)$

$g(0,0,2) = -2 < 10$, $h(0,0,2) = 2 \not< -2 \Rightarrow$ $\underline{\text{ej kandidat}}$

II) $2D_g$ $(g=10, h<-2)$: $\begin{cases} \nabla f \times \nabla g = 0 \\ g = 10 \\ h < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y(1+x) = 0 & (a) \\ z = 2-2x^2 & (b) \\ 2y(z-2-2x) = 0 & (c) \\ x^2+y^2-z = 10 & (d) \end{cases}$

- Antag först att $y=0$ ((a) och (c) uppfyllda) $\Rightarrow \begin{cases} z = 2-2x^2 \\ z = x^2-10 \end{cases}$ ger $x^2 = 4 \Rightarrow (x,y,z) = (\pm 2; 0; -6)$, med $h(\pm 2; 0; -6) = -6 < -2$ $\Rightarrow$ två kandidater : $\underline{f(\pm 2; 0; -6) = \mp 16}$.
- Låt $y \neq 0 \Rightarrow$ (a) ger $x=-1$ och (c) ger $z = 2+2x = 0$ ($\Leftrightarrow$ (b)), och y fås ur (d): $y^2 = 10+z-x^2 = 9 \Rightarrow (-1; \pm 3; 0)$, och insättning i $h(-1, \pm 3; 0) = 0 \not< -2$ visar att $(-1, \pm 3; 0)$ <u>inte</u> tillhör mängden.

III) $2D_h(g<10, h=-2)$ ger $\begin{cases} \nabla f \times \nabla h = 0 \\ h=-2 \\ g<10 \end{cases} \iff \begin{cases} z-2=0 \\ 2y=0 \\ z=-2 \\ g<10 \end{cases}$ saknar lösningar

IV) 1D: $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är linjärt beroende $\iff \begin{vmatrix} z-2 & 2x & 0 \\ 2y & 2y & 0 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2y(z-2-2x)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y(z-2-2x)=0 \\ x^2+y^2-z=10 \\ \underline{z=-2} \end{cases}$$, vilket ger två delfal:

IV a) $\begin{cases} z=-2 \\ y=0 \\ x^2=8 \end{cases} \Rightarrow (\pm 2\sqrt{2};0;-2)$ är kandidater, $\underline{f(\pm 2\sqrt{2};0;-2)=\mp 8\sqrt{2}}$

IV b) $\begin{cases} z=-2 \\ x=-2 \\ y^2=10-2-4=4 \end{cases} \Rightarrow (-2;\pm 2;2)$ är ytterliggare två kandidater,

$\underline{f(-2;\pm 2;2)=12}$

$\Rightarrow$ Optimering ger:

<u>Svar</u> $\boxed{f_{max}=16=f(-2;0;-6), \ f_{min}=-16=f(2;0;-6)}$