Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: 9GAM08
Provkod: STN1

Tentamen i 9GMA08 Matematik: Flervariabelanalys

2024-05-31 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/14 poäng med minst 3/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg G/VG. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla C^1-funktioner $f(x,y,z)$ sådana att

$$\begin{cases} f'_x &= e^x y^2 - z \\ f'_y &= 2ye^x + 2y\cos z \\ f'_z &= -x - y^2 \sin z \end{cases}$$

2. (a) Låt $f(x,y,z) = 2x^2 + yz$. Vilka av f:s nivåytor tangerar planet $4x + y + z = 6$? (2p)

   (b) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom i origo till $f(x,y) = (\cos x)^{e^{xy}}$. (1p)

3. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x,y)$ till $4y^2 z''_{xx} - 4yz''_{xy} + z''_{yy} - 2z'_x = 6y$ under bivillkoren $z(x,0) = x^2$ och $z'_y(x,0) = \sin x$ genom att t.ex. använda variabelbytet $u = x + y^2$, $v = y$.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
   $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xz - 2zy - 2yx$.

5. Beräkna integralen

$$\iint_D \max(0, y^2 - xy)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

   där D ges av $x^2 + y^2 \le 1$ och $x \ge 0$. (Beteckningen $\max(s,t)$ betyder som bekant det största av talen s och t.)

6. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ där $z^2 \ge x^2 + y^2$ och $2x + z = 2$. Motivera noga!

7. (a) Bestäm tyngdpunkten för den kropp D som uppstår när man från ett homogent halvklot $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$, med radie a tar bort ett halvklot med radie $b < a$, om motsvarande båda hela klot har samma centrum.

   (b) Undersök **speciellt** fallen $b = 0$ respektive $b \to a$. (Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för en homogen kropp D ges av $x_T = \dfrac{1}{M} \iiint_D x\, dxdydz$ där $M = \iiint_D dxdydz$ etc.)