Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: 9GMA08
Provkod: STN1

Tentamen i 9GMA08 Matematik: Flervariabelanalys

2025-06-04 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/14 poäng med minst 3/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg G/VG. Resultatet blir klart inom 15 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm alla C^1-funktioner $f(x,y,z)$ sådana att $\begin{cases} f'_x &= z\cos(xz)+y \\ f'_y &= x-2yz \\ f'_z &= 1-y^2+x\cos(xz) \end{cases}$ (2p)

   (b) Visa att det inte finns någon C^2-funktion $g(x,y)$ sådan att $\begin{cases} g'_x &= xe^{xy} \\ g'_y &= xe^{xy} \end{cases}$ (1p)

2. D är triangeln med hörn i $(-1,1)$, $(2,-2)$ och $(5,1)$. Beräkna integralen

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. (a) Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y,z)=e^{xyz}$ i punkten $(1,1,1)$ i den riktning som ges av vektorn $\mathbf{v}=(1,-2,2)$ (1p)

   (b) Visa att ekvationen $x\cos(yz)-y-z=0$ i en omgivning av punkten $(x,y,z)=(1,0,1)$ definierar en C^1-funktion $z=f(x,y)$. Bestäm sedan tangentplanet till grafen $z=f(x,y)$ i punkten $(x,y,z)=(1,0,1)$. (2p)

4. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

   där D ges av $x^2+y^2+z^2\le 4$, $x^2+y^2\le z^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ och $z\ge 0$.

5. Visa att punkten $(1,-1,0)$ är en stationär punkt för

$$f(x,y,z)=(x-1)(y+1)\sin z+x^2+y^2+3z^2+2xz+2zy+2y-2x.$$

   Avgör om den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt.

6. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz$ där $x^2+y^2+z^2\le 12$. Motivera noga!

7. Låt $D=\{(x,y):0<x<y^2<1, y>0\}$. Bestäm för vilka *positiva reella* tal $k>0$ integralen

$$\iint_D \frac{1}{y^k(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   är konvergent.