

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2025-06-04 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 15 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm alla C^1 -funktioner $f(x, y, z)$ sådana att
$$\begin{cases} f'_x = z \cos(xz) + y \\ f'_y = x - 2yz \\ f'_z = 1 - y^2 + x \cos(xz) \end{cases} \quad (2p)$$

(b) Visa att det inte finns någon C^2 -funktion $g(x, y)$ sådan att
$$\begin{cases} g'_x = xe^{xy} \\ g'_y = xe^{xy} \end{cases} \quad (1p)$$

2. D är triangeln med hörn i $(-1, 1)$, $(2, -2)$ och $(5, 1)$. Beräkna integralen

$$\iint_D xy \, dx dy.$$

3. (a) Bestäm riktningsderivatan av $f(x, y, z) = e^{xyz}$ i punkten $(1, 1, 1)$ i den riktning som ges av vektorn $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$ (1p)

(b) Visa att ekvationen $x \cos(yz) - y - z = 0$ i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ definierar en C^1 -funktion $z = f(x, y)$. Bestäm sedan tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y, z) = (1, 0, 1)$. (2p)

4. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz.$$

där D ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \leq z^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$.

5. Visa att punkten $(1, -1, 0)$ är en stationär punkt för

$$f(x, y, z) = (x - 1)(y + 1) \sin z + x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2zy + 2y - 2x.$$

Avgör om den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt.

6. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ där $x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$. Motivera noga!

7. Låt $D = \{(x, y) : 0 < x < y^2 < 1, y > 0\}$. Bestäm för vilka *positiva reella* tal $k > 0$ integralen

$$\iint_D \frac{1}{y^k(x+y)} \, dx dy$$

är konvergent.