

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2025-08-20 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 15 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm riktningsderivatan av $f(x, y, z) = xy + z^2$ i punkten $(1, 2, 3)$ i den riktning som ges av vektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. (1p)
(b) Bestäm alla plan som tangerar ytan $x^2 + y^4 = z^2 + 1$ och är parallella med planet $x + 2y + z = 1$. (2p)

2. Beräkna integralen

$$\iint_D xy \, dx dy$$

där D ges av $x^2 + 4x + 2y^2 \leq 12$ och $y \geq 0$.

3. Bestäm alla C^1 -lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen $xyz'_x - z'_y = x^2 e^{y^2}$ för $x > 0$ under randvillkoret $z(x; 0) = \sin(x^2)$ genom att till exempel göra variabelbytet $u = x^2 e^{y^2}$, $v = y$.

4. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D \sqrt{y - z} \, dx dy dz.$$

där D ges av $0 \leq x - y \leq y - z \leq x + z \leq 4$.

5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen $f(x, y, z) = 12x + 20y + 26z$ där $x^2 + z^2 \leq 25$ och $x + y + z = 0$.
6. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 3xy + yz$$

7. Bestäm för vilka värden på det reella talet k integralen

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^k \, dx dy$$

är konvergent, där $D = \{(x, y) : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$. Motivera noga!