Lösningsskisser till TATA43/9GMA08 Flervariabelanalys 2025-06-04

1. (a) $f'_x = z\cos(xz) + y \Rightarrow f(x,y,z) = \sin xz + yx + h(y,z)$, alltså $f'_y(x,y,z) = x + h'_y(y,z)$, substitution i den 2:a ekvationen ger $x + h'_y(y,z) = x - 2yz \Rightarrow h'_y(y,z) = -2yz \Rightarrow h(y,z) = -y^2z + g(z)$, alltså

$$f(x,y,z) = \sin xz + yx + h(y,z) = \sin xz + yx - y^2z + g(z),$$

och substitution i den 3:a ekvationen ger

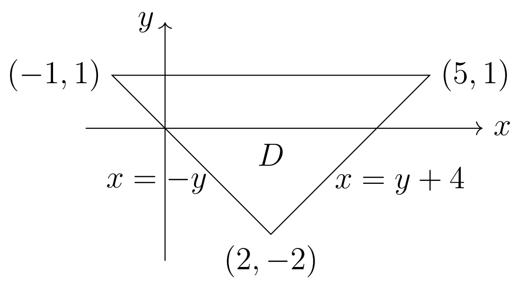
$$f'_z(x,y,z) = x\cos xz - y^2 + g'(z) = 1 - y^2 + x\cos(xz) \quad \Rightarrow \quad g'(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad g(z) = z + C,$$

alltså $f(x,y,z) = \sin xz + yx - y^2z + z + C$

(b) Under förutsettningar att funktionen $g(x,y)$ är av klass C^2 gäller det att $g''_{xy}(x,y) = g''_{xy}(x,y)$. I vårt fall: $g''_{xy}(x,y) = (xe^{xy})'_y = x^2e^{xy}$ medan $g''_{yx}(x,y) = (xe^{xy})'_x = e^{xy} + xye^{xy}$, dvs $g''_{xy}(x,y) \neq g''_{xy}(x,y)$, alltså lösningen saknas.

Svar: (a) $f(x,y,z) = \sin xz + yx - y^2z + z + C$, (b) se ovan.

2. Integration m h a stavar i y-led ger (se bilden)



$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\left(\int_{-y}^{y+4} xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{y+4}\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-2}^{1}(4y^2+8y)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{4y^3}{3} + 4y^2\right]_{-2}^{1} = 0$$

Alternativt ger integration m h a stavar i x-led:

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} x\left(\int_{-x}^{1} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{5} x\left(\int_{x-4}^{1} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{2} x\left(\frac{1-x^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{5} x\left(\frac{1-(x-4)^2}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = 0.$$

Svar: 0

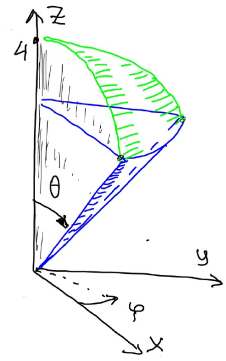
3. (a) $|\mathbf{v}| = |(1,-2,2)| = \sqrt{1+4+4} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} := \frac{1}{3}\mathbf{v} = \frac{1}{3}(1,-2,2)$ har längd 1.
$\nabla f(x,y,z) = e^{xyz}(yz, xz, xy) \;\Rightarrow \nabla f(1,1,1) = e(1,1,1)$
vilket ger $f'_{\mathbf{u}}(1,1,1) = \nabla f(1,1,1) \bullet \mathbf{u} = e(1,1,1) \bullet \frac{1}{3}(1,-2,2) = \frac{e}{3}$

(b) Funktionen $g(x,y,z) = x\cos(yz) - y - z = 0$ är av klass C^1, $g(1,0,1) = 1 - 0 - 1 = 0$, $g'_z(x,y,z) = -xy\sin(yz) - 1$, och speciellt $g'_z(1,0,1) = -1 \neq 0$, vilket medför m h a implicita funktionssatsen att ekvationen $x\cos(yz) - y - z = 0$ i en omgivning av punkten $(x,y,z) = (1,0,1)$ definierar en C^1-funktion $z = f(x,y)$. Eftersom grafen $z = z(x,y)$ är 0-nivå mängd av $g(x,y,z)$, är gradienten $\nabla g(1,0,1)$ en normal till tangentplanet i $(1,0,1)$. Eftersom $\nabla g(x,y,z) = (\cos(yx), -xz\sin(yz) - 1, -xy\sin(yz) - 1)$ blir $\mathbf{n} = \nabla g(1,0,1) = (1,-1,-1)$, vilket ger ekvationen för tangentplanet på normalform

$$\mathbf{n} \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1,-1,-1) \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = x - y.$$

Svar: (a) $f'_{\mathbf{u}}(1,1,1) = \frac{e}{3}$ (b) $z = x - y$

4. Övergång till sfäriska koordinater (r, θ, φ) ger



$$0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/4, \quad 0 \le \varphi \le pi/2$$
$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = r^2 \sin\theta, \quad \text{alltså}$$
$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^2 r \cdot r^2 \sin\theta\, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi/4} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = (2-\sqrt{2})\pi.$$

Svar: $(2-\sqrt{2})\pi$.

5. Första partiella derivatorna är:

$$\begin{aligned} f'_x &= (y+1)\sin z + 2x + 2z - 2 \\ f'_y &= (x-1)\sin z + 2y + 2z + 2 \\ f'_z &= (x-1)(y+1)\cos z + 6z + 2x + 2y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f'_x(1,-1,0) &= 0 \\ f'_y(1,-1,0) &= 0 \\ f'_z(1,-1,0) &= 0 \end{aligned}$$

alltså är $(1,-1,0)$ en stationär punkt. Andra derivatorna är

$$f''_{xx}(1,-1,0) = 2, \quad f''_{xy}(1,-1,0) = 0, \quad f''_{xz}(1,-1,0) = \Big[(y+1)\cos z + 2\Big]_{(1,-1,0)} = 2,$$
$$f''_{yy}(1,-1,0) = 2, \quad f''_{yz}(1,-1,0) = \Big[(x-1)\cos z + 2\Big]_{(1,-1,0)} = 2,$$
$$f''_{zz}(1,-1,0) = \Big[(1-x)(y+1)\sin z + 6\Big]_{(1,-1,0)} = 6,$$

Kvadratiska formen Q:

$$\begin{aligned} Q_{(1,-1,0)}(h,k,l) &= 2h^2 + 4hl + 2k^2 + 6l^2 + 4lk = 2(h+l)^2 - 2l^2 + 2k^2 + 6l^2 + 4lk = \\ &= 2(h+l)^2 + 2k^2 + 4lk + 4l^2 = 2(h+l)^2 + 2(k+l)^2 + 2l^2 \end{aligned}$$

är positivt definit: $Q_{(1,-1,0)}(h,k,l) \ge 0$ alltid och $Q_{(1,-1,0)}(h,k,l) = 0$ endast för $h = k = l = 0$, alltså är punkten ett lokalt min.

Svar: $(1,-1,0)$ är ett lokalt min.

6. Vi har $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ och sätter $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. f är kontinuerlig och villkoren $g \le 12$ beskriver en sluten och begränsad mängd vilket betyder att f har ett största och minsta värde på mängden. Kandidatjakten omfattar två fall: (3D) öppet klot $g(x,y,z) < 12$ och (2D) sfären $g(x,y,z) = 12$.

(3D) Stationära inre punkter: $f'_x = f'_y = f'_z = 0$, $g(x,y,z) < 12$ (öppet klot) ger

$$\begin{cases} 2x - 2yz &= 0 \\ 2y - 2xz &= 0 \\ 2z - 2xy &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= yz \\ y &= xz \\ z &= xy \end{cases}$$

a) Om $x = 0$ så medför den 2:a och den 3:e ekvationerna att $y = z = 0$, alltså $(0,0,0)$ som tillhör mängden, alltså en kandidat med $\boxed{f(0,0,0) = 0}$. Det samma resonemang gäller för $y = 0$ eller $z = 0$ och ger samma kandidat $(0,0,0)$.

b) Antag att $xyz \neq 0$, systemet ger $xyz = (zy)(xz)(xy) = (xyz)^2$, alltså $xyz = 1$ $\Rightarrow x = yz = 1/x \Rightarrow x = \pm 1$, och analogt med y, z. Detta ger ytterligare kandidater: $\boxed{f(1,1,1) = f(-1,-1,1) = f(1,-1,-1) = f(-1,1,-1) = 1}$ (alla ligger i tillhör mängden $g(x,y,z) < 12$).

(2D) Stationära punkter på sfären med ett aktivt bivillkor $g(x,y,z) = 12$ ges av $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow \nabla f \times \nabla g = \mathbf{0}$ vilket ger

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 2x - 2yz \\ 2y - 2xz \\ 2z - 2xy \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(y^2 - z^2) & = 0 \\ y(z^2 - x^2) & = 0 \\ z(x^2 - y^2) & = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

a) Antag att $xyz = 0$ och t.ex. $x = 0$, då medför $(*)$ att $yz^2 = zy^2 = 0$, vilket i sin tur ger att antigen y eller z är noll (obs. att alla tre koordinater får inte vara lika med noll eftersom $x^2 + y^2 + z^2 = 12$). I detta fall den skilda från noll koordinaten blir $\pm 2\sqrt{3}$, vilket totalt ger $2 + 2 + 2 = 6$ kandidater

$$\boxed{f(\pm 2\sqrt{3}, 0, 0) = f(0, \pm 2\sqrt{3}, 0) = f(0, 0, \pm 2\sqrt{3}) = 12}$$

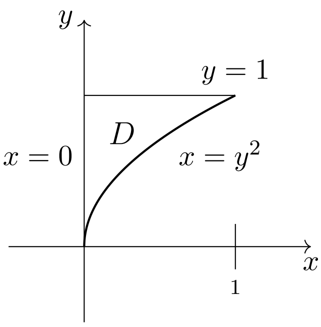
b) Om $xyz \neq 0$ så följer från $(*)$ att $x^2 = y^2 = z^2$, vilket insatt i $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ medför att det finns ytterligare 8 kandidater:

$$\boxed{f(2,2,2) = f(2,-2,-2) = f(-2,2,-2) = f(-2,-2,2) = 12 - 16 = -4},$$
$$\boxed{f(-2,2,2) = f(2,-2,2) = f(2,2,-2) = f(-2,-2,-2) = 12 + 16 = 28},$$

Optimeringen ger svaret:

Svar: $f_{\min} = f(2,2,2) = f(2,-2,-2) = f(-2,2,-2) = f(-2,-2,2) = -4$ och $f_{\max} = f(-2,2,2) = f(2,-2,2) = f(2,2,-2) = f(-2,-2,-2) = 28$

7. Integralen är generaliserad och integrationsområdet ges av $D = \{(x,y) : 0 < x < y^2 < 1, y > 0\}$. Eftersom integranden $\frac{1}{y^k(x+y)}$ är positiv kan vi tillämpa Fubinis sats och får



$$\iint_D \frac{1}{y^k(x+y)} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \frac{\mathrm{d}x}{y^k(x+y)} \right) \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{y^k} \left(\int_0^{y^2} \frac{\mathrm{d}x}{x+y} \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{y^k} \Big[\ln(x+y) \Big]_0^{y^2} \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{y^k} \ln\left(\frac{y^2 + y}{y} \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\ln(y+1)}{y^k} \mathrm{d}y$$

Observera nu att den sista integralen är generaliserad i $y = 0$ med en positiv integrand och

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

vilket medför att integralerna $\int\limits_0^1 \frac{\ln(y+1)}{y^k} \mathrm{d}y$ och $\int\limits_0^1 \frac{y}{y^k} \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \frac{1}{y^{k-1}} \mathrm{d}y$ är konvergenta (eller divergenta) samtidigt, vilket ger svaret (obs. att enligt uppgiften är $k > 0$):

Svar: Integralen är konvergent för $0 < k < 2$.