Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2025-01-07 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Visa att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 5$ i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (1, 2, 2)$ definierar en C^1-funktion $y = y(x, z)$.
   (b) Beräkna sedan $y(1, 2)$, $y'_x(1, 2)$ och $y'_z(1, 2)$.

2. (a) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom i origo till
   $$f(x, y) = \sin(2x - y)\mathrm{e}^{x+2y} + \sqrt{1 - 4x} + \ln(1 + y).$$
   (b) Vissa att origo är en stationär punkt till $f(x, y)$ och avgör dess karaktär.

3. Beräkna integralen
   $$\iint_D y^2 \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dxdy$$
   där D ges av olikheterna $x \geq 0, y \geq x$.

4. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x, y)$ till
   $$yz''_{yy} - xz''_{xy} + z'_y = 1 \qquad (x \neq 0),$$
   under bivillkoren $z(1, y) = 2y$, $z(x, 0) = x - 1$, genom att t.ex. använda variabelbytet $u = x$, $v = xy$

5. Berakna volymen av den kropp som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 4x$ och $|z| \leq x^2 + y^2$.

6. Bestäm alla punkter P på kurvan $x = y^2$ sådana att kurvans normallinje i P går genom punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Bestäm även motsvarande normallinjens ekvationer.

7. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y, z) = y^2 + xz - 2x$ då $x^2 + y^2 \leq z + 10$ och $z \leq -2$, om sådana finns.