

1a) $\nabla f(x,y,z) = (y, x, 2z)$, $\nabla f(1,2,3) = (2, 1, 6)$,

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, alltså $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (2, 1, 6) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

1b) Ytan ges av $F(x,y,z)=1$, där $F(x,y,z)=x^2+y^4-z^2$. Tangentplanet i en punkt $\vec{a}=(a,b,c)$ har normal $\nabla F(a,b,c)=(2a, 4b^3, -2c)$.

Normal till planet $x+2y+z=1$ ges av $\vec{n}=(1, 2, 1)$, alltså $\nabla F \parallel \vec{n}$ ger

$\nabla F \times \vec{n} = \vec{0} \Leftrightarrow 4a - 4b^3 = 4b^3 + 2c = 2a + 2c = 0$, vilket ger $c = -a$, $a = b^3$, alltså

$(a, b, c) = (b^3, b, -b^3)$, vilket insatt i $F(a, b, c) = 1$ ger $b^6 + b^4 - b^6 = 1 \Leftrightarrow$

$c \Rightarrow b^4 = 1 \Leftrightarrow b_1 = 1$ och $b_2 = -1$. Vi har alltså två punkter: $(1, 1, -1)$ och

$(-1, -1, 1)$, och respective tangentplan: ges av $x+2y+z=1+2-1=2$ och

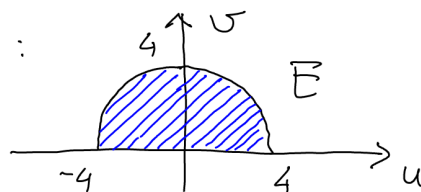
$x+2y+z=-1-2+1=-2$.

Svar: a) $3\sqrt{3}$

b) två tangentplan: $x+2y+z=\pm 2$ i resp. punkter $\pm(1, 1, -1)$.

② $x^2+4x+2y^2 \leq 12 \Leftrightarrow (x+2)^2+2y^2 \leq 16$, nya koordinater är

$\begin{cases} u = x+2 \\ v = \sqrt{2}y \end{cases}$ vilket ger $\begin{cases} u^2+v^2 \leq 16 \\ v \geq 0 \end{cases}$, halvcirkeln med radien $R = \sqrt{16} = 4$, se bilden:



$x = u-2$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}v$, $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\iint_D xy dx dy = \iint_E \frac{1}{\sqrt{2}}(u-2)v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} du dv = \left/ \begin{array}{l} u = \rho \cos \varphi \\ v = \rho \sin \varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 4 \end{array} \right/ = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^4 (\rho \cos \varphi - 2) \rho \sin \varphi d\rho d\varphi$

$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\int_{-1}^1 (\rho t - 2) \rho dt \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\rho^3 t^2}{2} - 2\rho^2 t \right]_{-1}^1 d\varphi = -\frac{4}{2} \int_0^\pi \rho^2 d\varphi = -2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = -\frac{128}{3}$

Svar: $-\frac{128}{3}$

$$(3) \quad z'_x = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = z'_u \cdot 2xe^{y^2}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = z'_u \cdot 2y^2e^{y^2} + z'_v$$

vilket ger: $xy z'_x - z'_y = 2x^2ye^{y^2} z'_u - 2y^2x^2e^{y^2} z'_u - z'_v = -z'_v$, alltså
 $-z'_v = x^2e^{y^2} = u \Leftrightarrow z'_v = -u \Leftrightarrow z = -uv + g(u) \Leftrightarrow z = -yx^2e^{y^2} + g(x^2e^{y^2})$,

där g är en C^1 -funktion. Bivillkoret $z(x,0) = \sin x^2$ ger

$$g(x^2) = \sin x^2 \Rightarrow g(t) = \sin t \Rightarrow g(x^2e^{y^2}) = \sin(x^2e^{y^2}), \text{ alltså:}$$

Svar: $z(x,y) = -yx^2e^{y^2} + \sin(x^2e^{y^2})$

(4) Variabelbyte: $u=x-y, v=y-z, w=x+z$, alltså:

$$E = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq u \leq v \leq w \leq 4\}, \quad \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \frac{1}{2}$ och Fubinisats med skivor i v -led ger:

$$\iiint_D \sqrt{y-z} \, dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint_E \sqrt{v} \, du dv dw = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{v} dv \left(\iint_{E_v} du dw \right) \quad \textcircled{=}$$

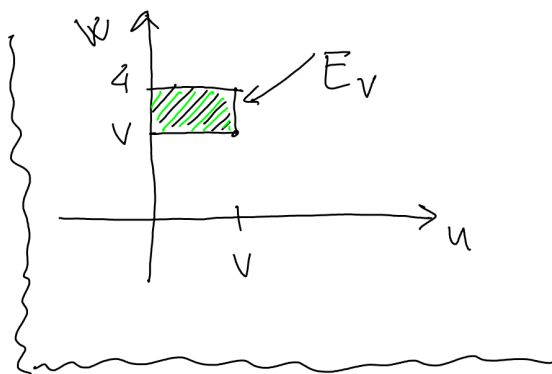
där E_v fås som $\{(u,w) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq u \leq v \text{ och } v \leq w \leq 4\}$, se bilden

$$\textcircled{=} \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{v} dv \cdot \text{Area}(E_v) = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{v} dv \cdot v(4-v) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 (4v^{3/2} - v^{5/2}) dv = \frac{1}{2} \left[\frac{8}{5} v^{5/2} - \frac{2}{7} v^{7/2} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{8}{5} \cdot 32 - \frac{2}{7} \cdot 128 \right] = \frac{256}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{256}{35}$$

Svar: $\frac{256}{35}$

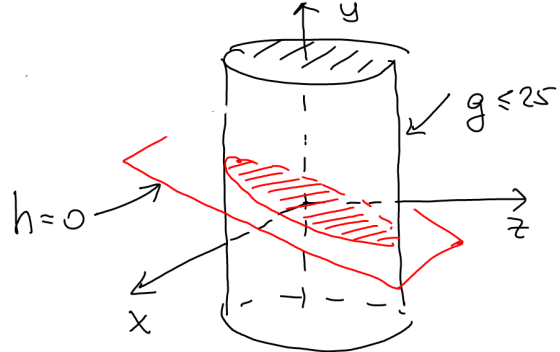


(Obs. att integranden $\sqrt{y-z} \geq 0$, alltså svaret måste vara > 0)

(5) $f(x,y,z) = 12x + 20y + 26z$ är kontinuerlig, $g = x^2 + z^2 \leq 25$ och $h = x+y+z=0$ ger en ellips (se bilden), alltså en kompakt mängd $\Rightarrow$ både största och minsta värde existerar; vi börjar kandidatjäkt.

Eftersom $h=0$ är aktivt, finns inga inre punkter, vi har två mängder att undersöka: A) $g < 25, h=0$

B) $g = 25, h=0$.



(A) $g < 25, h=0$, ett aktivt bivillkor ger $\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow \nabla f \times \nabla h = 0 \\ g < 25 \end{cases}$

Men $\nabla f \times \nabla h = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 26 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, alltså inga kandidater här.

(B) $g = 25, h=0 \Rightarrow \nabla f, \nabla g$ och ∇h är linjärt beroende $\Leftrightarrow \det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 12 & 20 & 26 \\ 2x & 0 & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2x(20-26) - 2z(12-20) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4z = 0, x = -\frac{4z}{3}$
insatt i $g = 25$, ger $\frac{16}{9}z^2 + z^2 = 25 \Leftrightarrow z^2 = 9$

alltså $z = \pm 3$, $x = \mp 4$ och $h=0$ ger $y = \pm 1$. Vi har kandidater $(-4, 1, 3)$ och $(4, -1, -3)$, där $f(-4, 1, 3) = 50$ och $f(4, -1, -3) = -50$.

Svar: $f_{\max} = 50 = f(-4, 1, 3)$, $f_{\min} = -50 = f(4, -1, -3)$

⑥ Stationära punkter fås ur $\nabla f(x, y, z) = 0$,

$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 2y - 3x + z = 0 \\ f'_z = 2z + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x = 2y + z = -3z \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \\ -2z = z^2 \end{cases} \text{ ger } \begin{cases} z(z+2) = 0 \\ z_1 = 0, z_2 = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ två stationära punkter, $(0, 0, 0)$ och $(2, 4, -2)$. Andra derivator:

$f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{xz} = 0$; $f''_{yy} = 2$; $f''_{yz} = 1$; $f''_{zz} = 2$, kvadratiska

formen: $Q(h, k, l) = 6x \cdot h^2 - 6hk + 2k^2 + 2kl + 2l^2$

a) i punkten $(0, 0, 0)$: $Q_{(0,0,0)} = -6hk + 2k^2 + 2kl + 2l^2$ är indefinit, ty

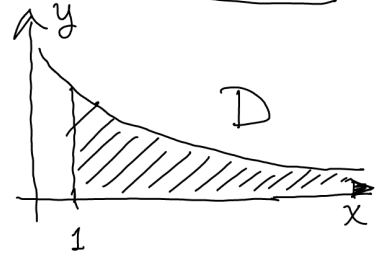
$Q_{(0,0,0)}(0, 0, 1) = 2 > 0$, $Q_{(0,0,0)}(1, 1, 0) = -4 < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt

$$\begin{aligned}
 (b) \quad Q_{(2,4,-2)}(h,k,\ell) &= 12h^2 - 6hk + 2k^2 + 2k\ell + 2\ell^2 = 2\left(\ell + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{2} + 2k^2 - 6hk + 12h^2 = \\
 &= 2\left(\ell + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(k^2 - 4hk) + 12h^2 = \\
 &= 2\left(\ell + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(k - 2h)^2 - \frac{3}{2}(2h)^2 + 12h^2 = \\
 &= 2\left(\ell + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(k - 2h)^2 + 6h^2
 \end{aligned}$$

(signature $(+, +, +) \Rightarrow$ positivt definit) $\Rightarrow$ en lok. minipunkt

Svar. $(2, 4, -2)$ är en lok. minipunkt, lok. max. saknas

⑦ Integralen är generaliserad i $y=0$ och D är obegränsat. Integranden är en positiv funktion, alltså kan vanliga metoder inkl. Fubinisats tillämpas.



$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{1}{\sqrt{y}} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^k dx dy &= \int_1^\infty (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^k dx \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dy}{\sqrt{y}} \right) = \\
 &= \int_1^\infty (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^k dx \cdot [2y^{\frac{1}{2}}]_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \int_1^\infty (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^k \frac{2dx}{\sqrt{x}}, \text{ är också en generaliserad} \\
 &\text{integral (i en variabel), där integranden } \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^k}{\sqrt{x}} = f(x) \text{ är positiv} \\
 &\text{och } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}})}. \text{ Vi också ser att:}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1+k}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x^{\frac{k}{2}} (1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}})^k \sqrt{x}} \cdot x^{\frac{1+k}{2}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}})^k} = \frac{1}{2^k} \neq 0$$

$\Rightarrow$ integraler $\int_1^\infty (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^k \frac{2dx}{\sqrt{x}}$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1+k}{2}}} dx$ är konvergenta (resp. divergenta) samtidigt. Som beaktat, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ är konvergent om och endast om $\alpha > 1 \Leftrightarrow \frac{1+k}{2} > 1 \Leftrightarrow k > 1$.

Svar. Integralen konvergent för $k > 1$ och divergent för $k \leq 1$.