

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2024-05-31 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla C^1 -funktioner $f(x, y, z)$ sådana att

$$\begin{cases} f'_x = e^x y^2 - z \\ f'_y = 2ye^x + 2y \cos z \\ f'_z = -x - y^2 \sin z \end{cases}$$

2. (a) Låt $f(x, y, z) = 2x^2 + yz$. Vilka av f 's nivåytor tangerar planet $4x + y + z = 6$? (2p)

(b) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom i origo till $f(x, y) = (\cos x)^{e^{xy}}$. (1p)

3. Bestäm alla C^2 -lösningar $z(x, y)$ till $4y^2 z''_{xx} - 4yz''_{xy} + z''_{yy} - 2z'_x = 6y$ under bivillkoren $z(x, 0) = x^2$ och $z'_y(x, 0) = \sin x$ genom att t.ex. använda variabelbytet $u = x + y^2$, $v = y$.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xz - 2zy - 2yx.$$

5. Beräkna integralen

$$\iint_D \max(0, y^2 - xy) \, dx dy.$$

där D ges av $x^2 + y^2 \leq 1$ och $x \geq 0$. (Beteckningen $\max(s, t)$ betyder som bekant det största av talen s och t .)

6. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ där $z^2 \geq x^2 + y^2$ och $2x + z = 2$. Motivera noga!

7. (a) Bestäm tyngdpunkten för den kropp D som uppstår när man från ett homogent halvklot $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, med radie a tar bort ett halvklot med radie $b < a$, om motsvarande båda hela klot har samma centrum.

(b) Undersök **speciellt** fallen $b = 0$ respektive $b \rightarrow a$. (Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för en homogen kropp D ges av $x_T = \frac{1}{M} \iiint_D x \, dx dy dz$ där $M = \iiint_D dx dy dz$ etc.)