Kroklinjiga koordinater i Vektoranalys.

1. Kroklinjiga koordinater. I ett kroklinjigt koordinatsystem parametriserat genom ortsvektorn $\mathbf{r}(u, v, w)$ med egenskapen att

$$\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = 0, \quad \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_w = 0, \quad \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_w = 0$$

sätter vi

$$\hat{u} = \frac{\mathbf{r}'_u}{|\mathbf{r}'_u|}, \quad \hat{v} = \frac{\mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_v|}, \quad \hat{w} = \frac{\mathbf{r}'_w}{|\mathbf{r}'_w|}$$

samt

$$h_u = |\mathbf{r}'_u|, \quad h_v = |\mathbf{r}'_v|, h_w = |\mathbf{r}'_w|.$$

Funktionerna $h_u,\ h_v,\ h_w$ kallas **skalfaktorer**. Enhetsvektorerna $\hat{u},\ \hat{v},\ \hat{w}$ bildar ett ortonormerat system av vektorer. Observera att dessa enhetsvektorer är **vektorvärda funktioner** och att vi i allmänhet kan, till exempel, ha $\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial v} \neq 0$.

(i) Kartesiska koordinater: I ett kartesiskt koordinatsystem har vi det ortonomala systemet $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ och den generiska ortsvektorn för en punkt anges som $\mathbf{r}(x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Vidare har vi

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} = 0$$

och likadant för $\hat{y}$ och $\hat{z}$. Med $u = x,\ v = y,\ w = z$ erhåller vi $h_u = h_v = h_w = 1$.

(ii) Sfäriska koordinater: Här inför vi ett variabelbyte: om (x, y, z) är kartesiska koordinater för en punkt i ett kartesiskt koordinatsystem, så sätter vi:

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta.$$

Idéen här är att man kan spalta upp rummet med hjälp av koncentriska sfärer med centrum i origo. Alla punkter med samma avstånd r från origo utgör en sfär med radie r. För att skilja på de olika punkterna på denna sfär inför vi två vinklar: θ, som är vinkeln mellan ortsvektorn $\mathbf{r}$ och den positiva $z-$axeln, genom ekvationen $\mathbf{r} \cdot \hat{z} = r \cos\theta$ med $0 \leq \theta \leq \pi$, där $r = |\mathbf{r}|$. Av detta följer att θ är entydigt definierad om $\mathbf{r} \neq 0$. Vidare är ϕ vinkeln i $xy-$planet mellan den positiva $x-$axeln och den ortogonala projektionen av $\mathbf{r}$ på $xy-$planet. Enkla räkningar ger

$$\mathbf{r} \cdot \hat{x} = r \sin\theta \cos\phi, \quad \mathbf{r} \cdot \hat{y} = r \sin\theta \sin\phi.$$

Vinkeln ϕ varierar i intervallet $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Det följer av beskrivningen att vinkeln ϕ är väldefinierad för alla punkter förutom de som ligger på $z-$axeln (deras ortogonala projektion på $xy-$planet är noll). Vi kan skriva

$$\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \cos\phi\, \hat{x} + r \sin\theta \sin\phi\, \hat{y} + r \cos\theta\, \hat{z}.$$

vi erhåller då $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin\theta$. Vidare har vi

$$
\begin{aligned}
\hat{r} &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\
\hat{\theta} &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\
\hat{\phi} &= -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.
\end{aligned}
$$

Ortsvektorn för en punkt kan nu skrivas som

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}.$$

Observera att

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \hat{\phi}, \quad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{r}, \quad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi} = \cos\theta\,\hat{\phi}.$$

(iii) Cylinderkoordinater: Idéen här är att spalta upp rummet i koncentriska cylindrar med $z-$axeln som symmetriaxel, så att varje punkt i rummet ligger någonstans på någon cylinder. Varje punkt har en ortsvektor som har en ortogonalprojektion på $xy-$planet, och längden av denna projektion, ρ är cylinderns radie. Exakt var punkten ligger på denna cylinder avgörs av $z-$koordinat (höjden) och av vinkeln ϕ som är vinkeln mellan ortsvektorns ortogonala projektion på $xy-$planet och positiva $x-$axeln. Vinkeln ϕ varierar i intervallet $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Alla punkter, förutom de på $z-$axeln, är entydigt definierade av deras **cylinderkoordinater** (ρ,ϕ,z). Punkter på $z-$axeln har ingen entydigt definierad vinkel ϕ, men är definierade enbart av $z-$koordinaten.

Ortsvektorn för en punkt ges nu som

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\cos\phi\,\hat{x} + \rho\sin\phi\,\hat{y} + z\,\hat{z}.$$

Vi har då $h_\rho = 1,\ h_\phi = \rho,\ h_z = 1$ och vi får

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\
\hat{\phi} &= -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \\
\hat{z} &= \hat{z}.
\end{aligned}
$$

Ortsvektorn för en punkt kan nu skrivas som

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

Observera att vi har

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\phi} = \hat{\phi}, \quad \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\phi} = -\hat{\rho}.$$

Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av:

$$\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi:

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1.$$

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \\
\hat{z} &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.
\end{aligned}$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi:

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta.$$

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\
\hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.
\end{aligned}$$

Vektorformler

1. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$
4. $\nabla \cdot (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A} + \beta\nabla \cdot \mathbf{B}$
5. $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$
6. $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$
7. $\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
8. $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$
9. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
10. $\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater
11. $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ
12. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, alla deriverbara skalärfält Φ, Ψ och alla deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.