

Vektoranalys
TATA44
Antekningar till föreläsningar

V. G. TKACHEV, LINKÖPING UNIVERSITY, SWEDEN

Email address: vladimir.tkatjev@liu.se

Innehåll

Grundinformation	1
Kapitel 1. Vektorfält, potential. Ytor, normaler, tangentplan. Gradient, divergens, rotation	3
§1.1. Repetition och motiveringar	3
§1.2. Euklidiskt rum	3
§1.3. Vektorvärda funktioner. Vektorfält. Kurvor. Ytor	5
§1.4. Gradient. Divergens. Rotation	6
Kapitel 2. Flödesintegraler. Gauss' Sats	9
§2.1. Area av en yta. Ytintegraler	9
§2.2. Flödesintegral	11
§2.3. Gauss' sats	12
Kapitel 3. Fysikalisk tolkning av divergens. Singulära vektorfält	15
§3.1. Fysikaliska motiveringar	15
§3.2. Singulära vektorfält	16
Kapitel 4. Kurvintegraler i planet. Greens formel	19
§4.1. Parameterkurvor. Linjeelement. Båglängd	19
§4.2. Kurvintegraler	20
§4.3. Slutna och enkla kurvor. Greens formel	21
Kapitel 5. Kurvintegraler i rummet. Stokes formel	23
§5.1. Kurvintegraler i \mathbb{R}^3	23
§5.2. Stokes sats	24
§5.3. Rotationen	26
Kapitel 6. Potentialfält	29
Kapitel 7. Koordinattransformationer. Kroklinjiga koordinater	31
§7.1. Kroklinjiga koordinater	31
§7.2. Vektorfält och Ortsvektordifferentiellen	33
§7.3. Linjeelement och räkneregler i kroklinjiga koordinater	33
Kapitel 8. Integraler i kroklinjiga koordinater	35

§8.1. Volymintegraler	35
§8.2. Linjeintegraler	36
§8.3. Ytintegraler	37
§8.4. Basvektornas differentialer	38
Sakregister	39

Grundinformation

Kursmål: mest om integrationsteori.

Mer formellt (lärandemål): Kursen avser att ge förtrogenhet med den grundläggande vektoranalys som används inom tekniska ämnen såsom ellära, mekanik och strömningslära. Efter kursen skall studenterna kunna

- bestämma potential till ett vektorfält
- beräkna kurv- och flödesintegraler, såväl med som utan användning av integralformler
- använda sfäriska och cylindriska koordinatsystem i beräkningar

Kurslitteratur:

- Ramgard, Anders, (2000) Vektoranalys 3. uppl. Stockholm : Teknisk högskolelitteratur i Stockholm
- (Kompendium) M. Nikoltjeva-Hedberg, Exempelsamling i vektoranalys, utgiven av MAI

Vektorfält, potential. Ytor, normaler, tangentplan. Gradient, divergens, rotation

1.1. Repetition och motiveringar

Envariabel analys: viktigaste relevana begrepp

- **Produktregel** (Leibniz sats): $(fg)' = f'g + fg'$.
- **Partialintegration**: $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$.
- **Integralkalkylens fundamentalsats**: $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$.

Man kan tolka minustecken högerled i den senaste som *orientering*:

$$[f(x)]_a^b = [f(x)]_{a \rightarrow b} = -f(a) + f(b) \quad (\text{orientering})$$



Orientering är ett viktigt begrepp i den här kursen, vi ska studera senare vad det betyder. T. ex. blir situationen svårare i rummet \mathbb{R}^3 . Kort sagt, orientering ges av *normalriktning* (vi ska diskutera det mer rigoröst senare). Vårt mål är att generalisera dessa satser till 2D och 3D mängder och funktioner.

1.2. Euklidiskt rum

\mathbb{R}^n är mängden av alla reella n -tiplar $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ med origo $\mathbf{0}$. Tillsammans med skalärprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ blir \mathbb{R}^n ett Euklidiskt rum där **längden** av en vektor \mathbf{x} ges av $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

I den här kursen studerar vi huvudsakligen två VIKTIGASTE SITUATIONER: planet \mathbb{R}^2 och rummet \mathbb{R}^3 . Vi använder följande beteckningar för standarda basvektorer:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x \\ \hat{y} &= \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y \\ \hat{z} &= \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{1.1}$$

vilket ger för **ortsvektorn**:

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

Observera att Ortsvektorns längd betecknas med

$$r = |x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

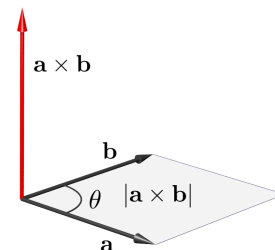
Allmänt, vi betecknar

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad (\text{enhetsvektor})$$

Vektorprodukt av två vektorer:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Parallelogrammens area ger storleken av $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$, se bilden.



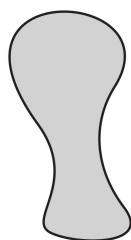
Volymen V till den parallellpiped som spänns upp av tre vektorerna \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} ges av

$$V = \mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

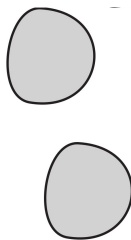
Som tidigare i flervariabelanalys, given en mängd D i \mathbb{R}^n , en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ kallas en **inre punkt** till D om det finns ett öppet klot kring \mathbf{a} som ligger helt i D och resp. en **yttre punkt** till D om det finns ett öppet klot kring \mathbf{a} som ligger i komplementet $D^c = \mathbb{R}^n \setminus D$ till D .

En mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ kallas **öppen** om alla dess punkter är inre punkter. Den kallas **sluten** om alla dess randpunkter tillhör D . En mängd D kallas **sammanhängande** om varje par av punkter i mängden kan förbindas med en kurva som ligger i D . Idé med denna definition är att en sammanhängande mängd består av **en** komponent.

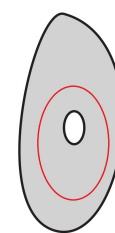
I den här kursen, kommer ett annat begrepp spela avgörande roll: en mängd D kallas **enkelt sammanhängande** om varje sluten kurva i D kan kontinuerligt deformeras i en punkt i D utan att lämna mängden D .



sammanhängande och enkelt sammanhängande



ej sammanhängande



ej enkelt sammanhängande

1.3. Vektorvärda funktioner. Vektorfält. Kurvor. Ytor

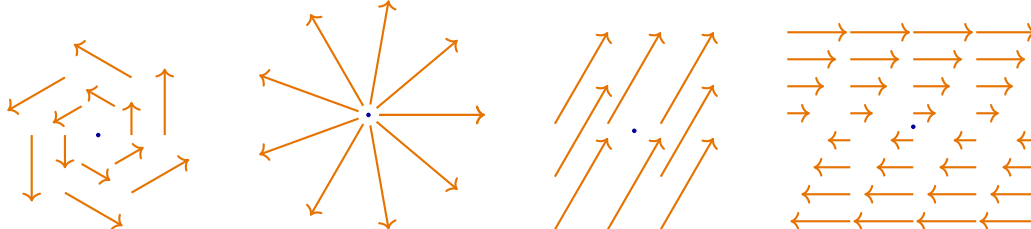
Viktiga speciella fall:

- en **reellvärd funktion** (också kallas för ett **skalärfält**) av två eller tre variabler, t. ex. $f(x, y) = x^2 + y^2$ – Exempelvis *densiteten*, *temperaturen*, *laddningsdensiteten* etc av en kropp i punkten \mathbf{r} ; i fysik kallas det ett **skalärfält** (som associerar reella tal $f(\mathbf{r})$ med punkter \mathbf{r} i rummet).
- en **vektorvärd funktion** av en eller flera variabler, t. ex.

$$\mathbf{A}(t) = (\cos t, \sin t, t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{t.ex. en planetbana})$$

$$\mathbf{B}(s, t) = \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{pmatrix}$$

- ett **vektorfält** tillordnar vektorer $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(x, y, z)$ till punkter i rummet (eller i planet), d v s är en avbildning av typen $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.



– Exempelvis *hastighetsfördelningen* $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ i en strömmande vätska eller elektromagnetiska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

- **Derivering** av vektorfält kan göras komponentvis. Exempelvis gäller

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (A_1, A_2, A_3) = \left(\frac{\partial A_1}{\partial u}, \frac{\partial A_2}{\partial u}, \frac{\partial A_3}{\partial u} \right)$$

- **Ortsvektordifferentialen** (eller **linjeelement**) är $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$

Man kan även betrakta olika avbildningar mellan \mathbb{R}^1 och \mathbb{R}^n (med andra ord, **parameterkurvor**) eller mellan \mathbb{R}^2 och \mathbb{R}^n (= **parameterytor**).

Exempel 1.1. En **plankurva** $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, där $t \in [a, b]$. Till exempel, en (half) elliptisk båge Γ_1 ,

$$\Gamma_1 : \mathbf{r} = (2 \cos t, \sin t), \quad t : 0 \rightarrow \pi.$$

Här betonar vi speciellt att Γ_1 **orientering** ges av omloppet $t : 0 \rightarrow \pi$, se bilden nedan till vänster,

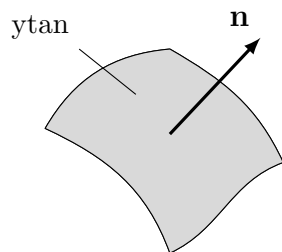


medan bilden till höger visar $\Gamma_2 : \mathbf{r} = (2 \cos t, \sin t)$ för $t : \pi \rightarrow 0$ (omvänd orienterad). **Tangentvektorn** av Γ_1 i $\mathbf{r}(t)$ ges av $\mathbf{r}'(t)$. Analogt definierar man **rymdkurvor**.

Exempelvis, tangentvektorn resp. tangelinjen till ellipsen Γ_1 ovan i punkten $t = \frac{\pi}{6}$ ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= (-2 \sin t, \cos t) \Big|_{\frac{\pi}{6}} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ \mathbf{r} &= \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right) + \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exempel 1.2. En **parameteryta** ges av $\mathbf{r} = \mathbf{f}(s, t)$, där $(s, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$.



Normalvektor i punkten $\mathbf{f}(s, t)$ ges av $\mathbf{n} = \mathbf{f}'_s \times \mathbf{f}'_t$

Tangentplan i punkten $\mathbf{f}(s, t)$ ges av $(\mathbf{r} - \mathbf{f}(s, t)) \bullet \mathbf{n} = 0$

Exempel 1.3 (Parameterframställning). Ytan S ges som en **graf**: $z = f(x, y)$ av en C^1 -funktion f , där $(x, y) \in D$. Vi kan skriva S på en parameterform, till exempel som

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (s, t, f(s, t)), \quad (s, t) \in D,$$

så att Ortsvektorns derivator ges av

$$\mathbf{r}'_s = (1, 0, f'_s)$$

$$\mathbf{r}'_t = (0, 1, f'_t),$$

och en normalvektor i punkten $(s, t, f(s, t))$ blir

$$\mathbf{n} = (-f'_s, -f'_t, 1)$$

Exempelvis, en normalvektor för paraboloiden $z = x^2 + y^2$ är $\mathbf{n} = (-2x, -2y, 1)$, och den motsvarande **enhetsnormalen** är

$$\hat{\mathbf{n}} = \left(-\frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}, -\frac{2y}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \right)$$

Exempel 1.4 (Implicit givna ytor). Ytan S ges av en ekvation: $F(x, y, z) = C$, där F är en C^1 -funktion. Man kan skriva S på en parameterform bara **lokalt** kring de punkter där **gradient** $\nabla F(x, y, z) \neq \mathbf{0}$. En normalvektor i punkten (x, y, z) ges av

$$\mathbf{n} = \nabla F(x, y, z) = (F'_x, F'_y, F'_z).$$

Underlagen för att arbeta med C^1 -avbildningar är följande sats som är bekant från flervariabelanalys:

Sats 1. En avbildning $\mathbf{F}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ är differentierbar i punkten \mathbf{a} om och endast om varje koordinatfunktion $F_k(\mathbf{r})$ differentierbar i \mathbf{a} , $1 \leq k \leq n$.

Derivator och differentierbarhet av vektorvärda funktioner följer samma regler som för differentierbara reellvärda funktioner förutsatt att alla relevanta uttryck är väldefinierade. Till exempel, låt δ vara en av $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, d , etc, så gäller det att

- $\delta(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \delta(\mathbf{A}) \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \delta(\mathbf{B})$.
- $\delta(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = \delta(\mathbf{A}) \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \delta(\mathbf{B})$.
- $\delta(\varphi \mathbf{B}) = \delta(\varphi) \bullet \mathbf{B} + \varphi \bullet \delta(\mathbf{B})$.

1.4. Gradient. Divergens. Rotation

Gradienten av en differentierbar funktion $f(\mathbf{r})$ är vektorfältet

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \text{grad } f(\mathbf{r}) = (f'_x, f'_y, f'_z) \quad (\text{'nabla'})$$

Man kan visa enkelt att för gradienten gäller, till exempel, följande produktregeln:

$$\nabla(\varphi\Psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi)$$

Gradienten är en vektorvärd funktion, till skillnad från en partiell derivata som är skalärvärd.

Gradientens egenskaper:

- Om $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla\varphi(\mathbf{r})$ kallas vektorfältet $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ **potensialvektorfält** och φ kallas en **potentialfunktion**
- Gradienten $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ pekar i den riktning i vilken φ växer **snabbast**.
- Absolutvärdet av gradienten $|\nabla\varphi(\mathbf{r})|$ utgör i varje punkt det största värdet för ökningen per längdenhet av skalärfältet φ .
- Gradienten $\nabla\varphi$ i en punkt \mathbf{a} är ortogonal mot till nivåmängden $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{a})$ som passerar genom \mathbf{a} .
- **Riktningssderivata:** $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{v}$

Given ett vektorfält $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kommer vi studera även **divergens** och **rotation** som definieras med hjälp av **nablaoperatoren**

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

respektivt:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Exempel 1.5. Om $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x, y, z)$ så har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} z - \frac{\partial}{\partial z} y \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial z} x - \frac{\partial}{\partial x} z \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} x \right) = \mathbf{0}$$

Flödesintegraler. Gauss' Sats

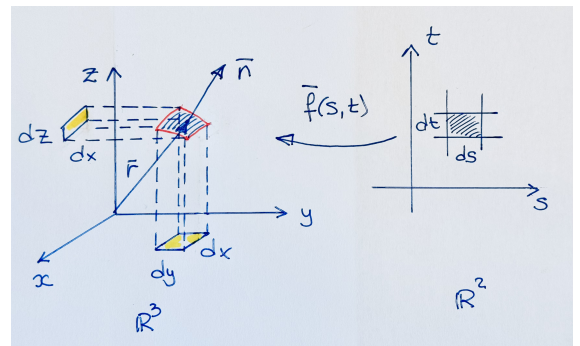
2.1. Area av en yta. Ytintegraler

Vi betraktar bara **styckvis glatta** ytor, vilket innebär att en sådan yta kan ges av en kontinuerlig och **styckvist** C^1 -differentierbar parameterframställning $\mathbf{r}(u, v)$. Analogt kan man definiera area av en yta.

Låt $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$, $(s, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, vara en **parameteryta**. Observera att i det här fallet gäller att \mathbf{r} är en avbildning mellan \mathbb{R}^2 och \mathbb{R}^3 . Detta ger

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) = x(s, t)\hat{x} + y(s, t)\hat{y} + z(s, t)\hat{z}$$

Låt oss räkna ut area för ändringen av en rektangel med sidorna s , $s + ds$ och t , $t + dt$. *Rektangeln* avbildas på en infinitesimal yta som kan approximeras med ett *parallelogram* med sidorna $\mathbf{r}(s, t)$, $\mathbf{r}(s + ds, t)$, $\mathbf{r}(s, t + dt)$ och $\mathbf{r}(s + ds, t + dt)$.



Det gäller

$$\mathbf{r}(s + ds, t) - \mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}'_s ds$$

$$\mathbf{r}(s + dt, t) - \mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}'_t dt.$$

vilket ger

$$(\mathbf{r}(s + ds, t) - \mathbf{r}(s, t)) \times (\mathbf{r}(s, t + dt) - \mathbf{r}(s, t)) = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t ds dt.$$

Area hos ett parallelogram som spänns upp av två vektorer är längden av deras vektorprodukt. Alltså fås

$$dS = |(\mathbf{r}(s + ds, t) - \mathbf{r}(s, t)) \times (\mathbf{r}(s, t + dt) - \mathbf{r}(s, t))| = |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| ds dt.$$

Den totala **area av ytan** S fås via integration:

$$\text{Area}(S) = \iint_S dS = \iint_D |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| ds dt.$$

Integralen

$$\iint_S dS$$

är ett exempel av **ytintegral**. Analogt kan man definiera '2D-massa' av en yta S med densitet $\rho(\mathbf{r})$:

$$\iint_S \rho(\mathbf{r}) dS = \iint_D \rho(\mathbf{r}(s, t)) |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| ds dt.$$

Definition 2.1. Infinitesimal area $dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$ kallas för **ytelement** för parameterytan $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Vi också använder **vektoriella ytelement**

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v du dv, \quad dS = |d\mathbf{S}|.$$

Observera att vektoriella ytelement har samma normalens riktning (se Exempel 1.2 ovan):

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dudv = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \hat{\mathbf{n}} dudv.$$

Exempel 2.1 (Graf). Betrakta ytan som ges som en **graf** $z = f(x, y)$ över ett område $D \subset \mathbb{R}^2$. Man kan definiera **parameterframställning**, till exempel, som $x = x, y = y$ och $z = f(x, y)$. Detta ger

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + f(y, t)\hat{z} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}'_x = \hat{x} + f'_x \hat{z} = (1, 0, f'_x), \\ \mathbf{r}'_y = \hat{y} + f'_y \hat{z} = (0, 1, f'_y), \end{cases} \Rightarrow \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-f'_x, -f'_y, 1),$$

vilket medför att

$$dS = |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dx dy = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy = \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} dx dy. \quad (2.1)$$

Exempel 2.2 (Nivåytan). Betrakta en nivåyta som ges av den implicita ekvationen $F(x, y, z) = C$ och antar att $F'_z \neq 0$ (man kan betrakta analogt $F'_x \neq 0$ resp. $F'_y \neq 0$). Enligt implicita funktionssatsen blir nivåytan lokalt en graf av en C^1 -funktion $f(x, y)$ över (x, y) -planet, med andra ord

$$F(x, y, f(x, y)) = C.$$

Implicitderivering tillsammans med kedjeregeln ger

$$\begin{cases} F'_x + F'_z f'_x = 0, \\ F'_y + F'_z f'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \\ f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \end{cases}$$

och slutligen med hjälp av (2.1)

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy = \sqrt{\frac{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}{F'^2_z}} dx dy = \frac{|\nabla F|}{|F'_z|} dx dy.$$

Sammanfattningsvis, kan man uttrycka ytelement beroende på parameterframställning på tre olika sätt:

- en **parameteryta** $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$, $dS = |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| ds dt$;
- en **nivåyta** $S : F(x, y, z) = C$, $dS = \frac{|\nabla F|}{|F'_z|} dx dy$;
- en **graf** över (x, y) -planet $S : z = f(x, y)$, $dS = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$

Exempel 2.3. Betrakta halvkonen $z^2 = x^2 + y^2, z > 0$. M.h.a. parametrering $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, u)$ (där $u \geq 0$) fås

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (\cos v, \sin v, 1) \times (-u \sin v, u \cos v, 0) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u \cos v, -u \sin v, u)$$

alltså $dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv = u\sqrt{2} du dv$. Sedan bestämmer vi ytelement genom att betrakta S som nivåytan $F(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 = 0$, vilket ger

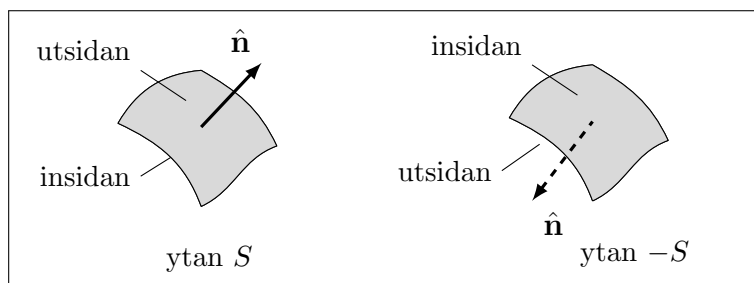
$$dS = \frac{|\nabla F|}{|F'_z|} dx dy = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dx dy = (\text{m.h.a. } z^2 = x^2 + y^2) = \frac{\sqrt{8}\sqrt{x^2 + y^2}}{2z} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Och slutligen betraktar vi S som en graf $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, vilket ger det $dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy$.

2.2. Flödesintegral

Definition 2.2. Låt $\hat{\mathbf{n}}$ vara ett normalfält till en yta S . Då sägs S vara **orienterad** med $\hat{\mathbf{n}}$.

OBS. Ibland man menar att S har två 'sidor': den plus-sida (**utsidan**) motsvarar till normalens riktning, medan minus-sidan (**insidan**) motsvarar omvänd orientering. Observera att *orientering påverkar ett konkret val av parameterframställning*, se Exempel 2.4 nedan.



Som ett typiskt exempel ska vi studera hur mycket vätska som flödar genom en yta per tidsmoment.

Låt $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, vara en parameteryta och $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vara **hastighetsfältet**. Antag att vätskan har densitet $\rho(\mathbf{r})$ vid punkten \mathbf{r} . För att beräkna flödet över S hackar vi S i små bitar $S_{ij} \approx dS$. Om S_{ij} är tillräckligt liten, då kan den approximeras av ett tangentplan vid resp. punkt \mathbf{r} . Den vätska som strömmar genom S under tiden dt kan approximeras med en **parallelepiped** med basen S_{ij} lutande parallellt med hastighetsvektorn \mathbf{v} . Från (1.2) vet vi att volym av parallelepiped

$$dV = (\mathbf{v}dt) \bullet (\mathbf{r}'_u du \times \mathbf{r}'_v dv) = \mathbf{v} \bullet d\mathbf{S}$$

och västkans massa blir

$$dM = \rho(\mathbf{r})dV = \rho(\mathbf{r})dt \mathbf{v} \bullet d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v} \bullet d\mathbf{S} = \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S},$$

där $\mathbf{A} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}$. Den totala vätskans massa som flödar genom ytan S per tidsmoment fås via integration:

$$\text{flödet} = \iint_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}) \bullet (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv.$$

Observera att *resultatet är oberoende av valet en partikulär parameterframställning*.

Definition 2.3. Flödesintegralen av vektorfältet \mathbf{A} över en parameteryta S är

$$\iint_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S} := \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}) \bullet (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv = \iint_S \mathbf{A} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_S \mathbf{A}_n dS.$$

där \mathbf{A}_n är den orthogonala projektionen av \mathbf{A} parallellt med \mathbf{n} .

- Om $-S$ är ytan med omkastad orientering gäller att $\iint_{-S} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S} = -\iint_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}$.
- Om $S = S_1 + \dots + S_k$ består av ett ändligt antal delytor S_i gäller att $\iint_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}$

Exempel 2.4. Beräkna flödet I av $\mathbf{A} = (-y, x, 3z)$ ut genom ytan $z = x^2 + y^2$, där $z \leq 1$, i riktning $\hat{\mathbf{n}} \bullet \hat{\mathbf{z}} < 0$.

Lösning. Vi betraktar S som parameterytan med parameterframställning $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ där (x, y) ligger i området $E = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Detta ger

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (1, 0, 2x) \times (0, 1, 2y) = (-2x, -2y, 1) \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}(-2x, -2y, 1),$$

vilket ger emellertid att $\hat{\mathbf{n}} \bullet \hat{\mathbf{z}} > 0$. Det kan åtgärdas på två olika sätt: antingen lämna kvar den aktuella parameterframställningen och sätta omvänd tecken på flödesintegralen, eller byta tecken hos enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$, vilket

medför det samma resultat. Observera att $\mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y)) = (-y, x, 3(x^2 + y^2))$, alltså m.h.a. polära koordinater

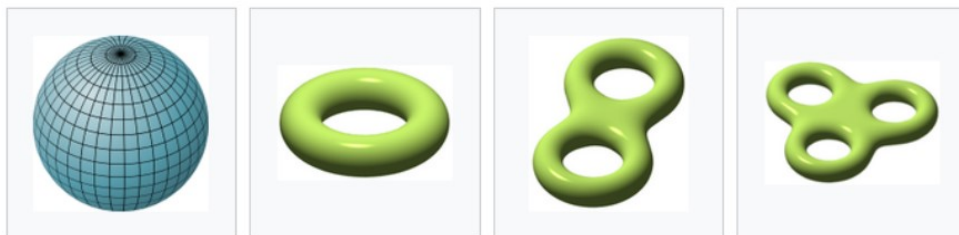
$$\begin{aligned} I &= - \iint_E \mathbf{A} \bullet (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy = - \iint_E (-y, x, 3(x^2 + y^2)) \bullet (-2x, -2y, 1) dx dy = -3 \iint_E (x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^3 d\phi d\rho = -\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

2.3. Gauss' sats

En sluten yta är ett viktigt partiellt fall. Gauss lag säger att den totala laddningen innanför en sluten yta S fås med flödesintegralen

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S}.$$

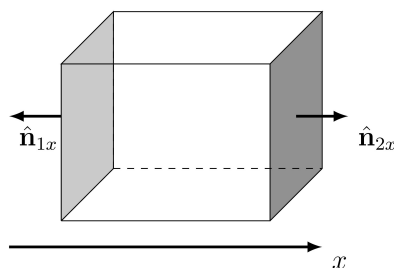
En allmänt **Gauss' sats** tillåter oss att ersätta integralen som tagits över en kropp med en integral som tagits över ytan som begränsar denna kropp, och vice versa.



Sats 2 (Gauss' sats). Låt D vara ett begränsat område in \mathbb{R}^3 och S vara dess rand med **utåtriktade** orientering $\hat{\mathbf{n}}$. Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vara ett C^1 -vektorfält. I så fall gäller Gauss' sats:

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_D \nabla \bullet \mathbf{F} dV$$

Idè med **bevis** i ett viktigt specialfall där D är ett rätblock $\{a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}$.



Randen ∂D består av sex ytor $S_{1x}, S_{2x}, S_{1y}, \dots, S_{2z}$ med **utåtriktade orientering**, där speciellt

$$S_{i,x} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a_i, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}$$

$$\partial D = \partial S_{1x} + \partial S_{2x} + \dots + \partial S_{2z}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{1x} = (-1, 0, 0), \hat{\mathbf{n}}_{1y} = (0, -1, 0), \dots$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{2x} = (1, 0, 0), \hat{\mathbf{n}}_{2y} = (0, 1, 0), \dots$$

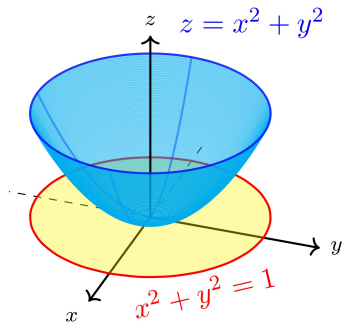
Betrakta $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1\hat{x} + F_2\hat{y} + F_3\hat{z}$. Då blir flödesintegralen

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \iint_{\partial D} (F_1(\mathbf{r})\hat{x} + F_2(\mathbf{r})\hat{y} + F_3(\mathbf{r})\hat{z}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = - \underbrace{\iint_{\partial S_{1x}} F_1(\mathbf{r}) dS + \iint_{\partial S_{2x}} F_1(\mathbf{r}) dS}_{I_1} + I_2 + I_3.$$

Låt $S_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}$ vara projektion av D på yz -planet. Integration med stavar i x -led ger

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial F_1(\mathbf{r})}{\partial x} dV &= \iint_{S_x} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} dx \right) dy dz = \iint_{S_x} (F_1(a_2, y, z) - F_1(a_1, y, z)) dy dz \\ &= - \iint_{\partial S_{1x}} F_1(\mathbf{r}) dS + \iint_{\partial S_{2x}} F_1(\mathbf{r}) dS = I_1 \end{aligned}$$

vilket medför slutsatsen. □



Exempel 2.5 (Exempel 2.4, forts.). Vi ska beräkna flödet I i Exempel 2.4 med hjälp av Gauss' sats. Låt D vara paraboloiden $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ så att $\partial D = S + S_1$ där S är paraboloidens sidoyta (från Exempel 2.4) och S_1 är cirkelskivan $z = x^2 + y^2 = 1$ orienterade med **uppåtriktade** normalen (varför?). Då gäller

$$\iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S} = \oiint_{\partial D} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV.$$

Eftersom $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial 3z}{\partial z} = 3$,

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = 3 \iiint_D dV = 3 \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \right) dz = 3 \int_0^1 \pi z \, dz = \frac{3\pi}{2}$$

Å andra sidan har vi $z = 1$ och $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ för S_1 (varför?) vilket ger för flödesintegralen genom S_1 :

$$\iint_{S_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S} = \iint_E (-y, x, 3) \cdot (0, 0, 1) \, dx dy = \iint_E 3 \, dx dy = 3 \text{ Area}(E) = 3\pi,$$

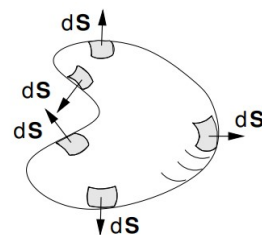
alltså

$$\iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV - \iint_{S_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S} = \frac{3\pi}{2} - 3\pi = -\frac{3\pi}{2}.$$

Fysikalisk tolkning av divergens. Singulära vektorfält

3.1. Fysikaliska motiveringar

Divergensen av ett vektorfält definieras som en skalärprodukt mellan nablooperatorn och fältet. Det finns ett alternativt sätt som fysiskt är mer vettigt. Låt oss betrakta ett flöde och en liten volym i detta flöde, och försöka beräkna hur mycket vätska som kommer att passera genom det, med hänsyn till riktningen: utåt – med ett plus, inåt – med ett minus. Och låt oss försöka komprimera den här volymen till en punkt.



Låt D vara en kropp i \mathbb{R}^3 , $\mathbf{a} \in D$ och V vara en liten volym (till exempel en **konvex kropp**)¹ kring en punkt \mathbf{a} . Låt \mathbf{F} vara en C^1 -vektorfält i D . Eftersom divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}$ är en kontinuerlig funktion (varför?), Medelvärdesatsen säger att existerar en punkt $\xi \in V$ sådan att

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{r}) dV = (\nabla \cdot \mathbf{F})(\xi) \iiint_V dV = (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{a}) \cdot \text{Vol}(V)$$

Å andra sidan, Gauss' sats ger $\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{r}) dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \approx \text{ut} - \text{in}$, alltså

$$\underbrace{\text{källtätheten (flux density) i } \mathbf{a} = \text{div} \mathbf{F}(\mathbf{a})}_{\text{ett fysikaliskt begrepp}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\text{Vol}(V) \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{\text{Vol}(V)} = (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{a}).$$

Slutsatser. Divergensen visar något om hur mycket vätska med hastighetsflödet \mathbf{F} flödar ut av (eller in i) punkten \mathbf{a} per volymenhet. Alternativt, Gauss' sats innebär att antalet fältlinjer

- Om $\text{div} \mathbf{F} < 0$ måste vätska annihileras i V ; man pratar i detta fall om **sänkor** i dV .
- Om $\text{div} \mathbf{F} > 0$ måste vätska strömmas in i V ; man pratar i detta fall om **källor** i dV .
- Om $\text{div} \mathbf{F} = 0$ man säger att vätskeströmning är **divergensfri**.

¹En mängd är **konvex** om varje punkt längs en sträcka mellan två godtyckligt valda punkter i mängden också ligger i mängden

Ett divergensfria vektorfält **i hela** \mathbb{R}^3 har noll-flöde genom alla **slutna** ytor (d v s ytor som begränsar en kompakt kropp): om $S = \partial V$ så med användning av Gauss' sats fås

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{r}) dV = 0. \quad (3.1)$$

Vi har en följsats: om $\text{div } \mathbf{F} = 0$ och S är en sluten yta uppdelad i delytar enligt $S = S_1 + \dots + S_n$ så gäller

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \dots + \iint_{S_n} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.2)$$

Denna egenskap används för att lösa ut en okänd flödesintegral i (3.2).

Exempel 3.1 (Ytan ej sluten). Beräkna flödet av $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x, x^3z^2 - 2y, x^2y^2)$ ut genom en halv ellipsoid yta S som ges av $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $x \geq 0$, i riktning $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}} > 0$.

Lösning. Observera att $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$. Låt D vara halv ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 6$, $x \geq 0$. Vi kan dela upp dess randyta i två delytar: S och S_1 , där S_1 ges av $x = 0$ och $2y^2 + 3z^2 \leq 6$. Då **omslutar** S och S_1 kroppen D :

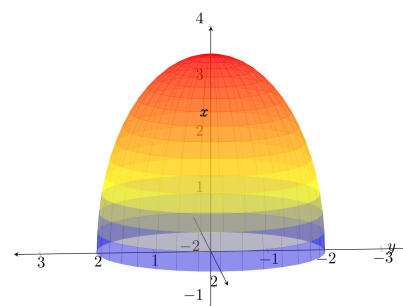
$$\partial D = S + S_1, \quad S, S_1 \text{ är utåt orienterade,}$$

Eftersom $\text{div } \mathbf{F} = 0$ erhålls det totala utflödet med hjälp av Gauss' sats

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

alltså

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_1} (0, -2y, 0) \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) dydz = \iint_{S_1} 0 dydz = 0.$$



3.2. Singulära vektorfält

Däremot finns små nyanser som kan försvåra arbetet. Betrakta följande exempel.

Exempel 3.2. Beräkna flödet av $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3})$ ut genom en sfären S $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Lösning 1. (Fel lösning) Vi har

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (r^{-3}\mathbf{r}) = (\nabla r^{-3}) \cdot \mathbf{r} + r^{-3}(\nabla \cdot \mathbf{r}) = (-3r^{-4} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}) \cdot \mathbf{r} + r^{-3} \cdot 3 = 0$$

och använder **Gauss' sats** (3.1) **direkt** för klotet $D = \{\mathbf{r} : r \leq R\}$. Så blir resultatet

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{r}) dV = 0.$$

Lösning 2. (Korrekt lösning) Vi beräknar flödesintegralen **via definition**: så fås (obs. att $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{R}\mathbf{r}$) att

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (R^{-3}\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{R}\mathbf{r} dS = \iint_S (R^{-4} \cdot R^2 dS = R^{-2} \cdot \text{Area}(S) = R^{-2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \neq 0!$$

Varifrån kommer motsägelsen?...

Problemet är att vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^{-3}\mathbf{r}$ är **singulär** (är inte längre av klass C^1 kring origo) innanför D och Gauss' sats kan **inte** tillämpas. I ett sådant fall får man inte applicera Gauss sats till hela D , men får istället att **'operera bort singulariteten'**. Se ett par exempele nedan

Exempel 3.3. Beräkna flödet av $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3})$ ut genom en ellipsoiden S $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Lösning. Precis som i Exempel 3.2 fås $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$. Observera att beräkning via definition är nu mycket svårare p.g.a. att ellipsoiden har en svårare parametrisering och flödesintegralen kommer bli svårt hanterlig tekniskt. Så att vi försöker utnyttja Gauss' sats istället *men med vissa modifikationer*.

Vi noterar att vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^{-3}\mathbf{r}$ är **singulär** i origo och betraktar en kropp **med håll i origo**

$$D_\epsilon = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 1 \text{ och } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 > \epsilon^2\}$$

där $\epsilon >$ är tillräckligt litet. Vi har för randen

$$\partial D_\epsilon = S + S_\epsilon,$$

där delytan S_ϵ är orienterad utåt m.a.p. D_ϵ (se bilden). Observera att $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ har inte längre singulariteter innanför D_ϵ , alltså

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\partial D} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{r}) dV = 0.$$

$$\Rightarrow \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = (\hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\epsilon}\mathbf{r} \text{ längs } S_\epsilon) = - \iint_{S_\epsilon} r^{-3}\mathbf{r} \cdot (-\frac{1}{\epsilon}\mathbf{r}) dS = \frac{\text{Area}(S)}{\epsilon^2} = \frac{4\pi\epsilon^2}{\epsilon^2} = 4\pi$$

Studera även ett **mer avancerat** exempel nedan.

Exempel 3.4 (En lång singularitet, *linjekälla*). Beräkna flödet av $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, 0)$ ut genom ytan S : $4x^2 + 9y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $\hat{\mathbf{n}}$ riktad utåt.

Lösning.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= (xr^{-2})'_x + (yr^{-2})'_y = (r^{-2} - 2r^{-4}x^2) + (r^{-2} - 2r^{-4}y^2) \\ &= 2r^{-2} - 2r^{-4}r^2 = 0. \end{aligned}$$

Vi noterar att vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ är **singulär** för alla punkter $(0, 0, z)$, d.v.s. längs hela z -axeln. Analogt till Exempel 3.3 betraktar vi en kropp **med ett cylindriskt håll**

$$D_\epsilon = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 < 1, \quad x^2 + y^2 > \epsilon^2, \quad 0 < z < 1\}$$

där $\epsilon >$ är tillräckligt litet. Vi har för randen

$$\partial D_\epsilon = S + S_\epsilon + B + T,$$

där delytan S_ϵ är orienterad innåt, B uppåt och T neråt (i z -riktning), alltså

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_T \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

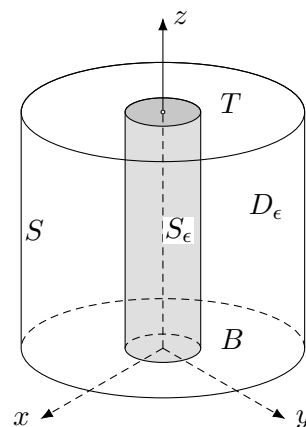
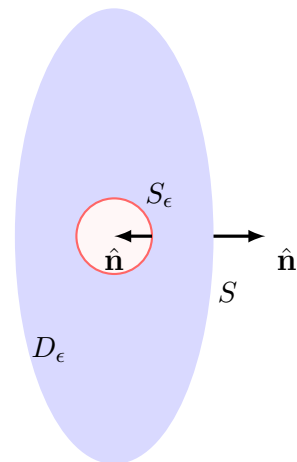
där S_ϵ parametriseras med $\mathbf{r} = (\epsilon \cos \phi, \epsilon \sin \phi, z)$, $z \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, och $\mathbf{n} = (\mathbf{r}'_z \times \mathbf{r}'_\phi) = -\epsilon(\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $\hat{\mathbf{n}} = -(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ (obs. innåt!),

$$\iint_{S_\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2}(\epsilon \cos \phi, \epsilon \sin \phi, 0) \cdot (-\epsilon(\cos \phi, \sin \phi, 0)) dS = -\frac{\text{Area}(S_\epsilon)}{\epsilon} = -2\pi$$

$$\iint_B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_B (\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, 0) \cdot (0, 0, -1) dS = 0$$

$$\iint_T \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_T (\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, 0) \cdot (0, 0, 1) dS = 0$$

$$\text{vilket ger } \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -(-2\pi + 0 + 0) = 2\pi.$$



Kurvintegraler i planet. Greens formel

4.1. Parameterkurvor. Linjeelement. Båglängd

I en **kurvintegral**, som även kallas en **linjeintegral**, summeras värdena av en funktion av två (eller tre) variabler som funktionen tar på en viss kurva i planet (rummet).

En **parameterkurva** i \mathbb{R}^n ges av $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Observera att vi *inte* kräver att $\alpha < \beta$. Riktningen $\alpha \rightarrow \beta$ beskriver kurvans **orientering (omloppsriktning)**, se exempelvis två olika orienteringar för halvcirkeln



Det finns tre viktiga sätt att beskriva en kurva i planet (vi åskådiggör det med halva av enhetscirkeln):

- med parameterframställning $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (exempelvis, $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $t : 0 \rightarrow \pi$);
- en implicit ekvation $F(x, y) = C$ (exempelvis, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, omloppet från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$);
- som en graf av en eller flera funktioner (exempelvis, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x : -1 \rightarrow 1$).

Vi antar att $\mathbf{r}(t)$ är en kontinuerlig och styckvis C^1 -avbildning. Vektorn $\mathbf{r}'(t)$ kallas för **tangentvektorn**, eller **hastighetsvektorn** i punkten $\mathbf{r}(t)$. En parameterkurva är **regulär** om $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ för alla parametervärden t .

Linjeelement $ds = |d\mathbf{r}|$ är = beloppet av Ortsvektordifferentiellen. **Längden (båglängden)** av en parameterkurva $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$$\text{båglängden av } \Gamma = \underbrace{\int_{\Gamma} ds = \int_{\Gamma} |d\mathbf{r}|}_{\text{utan parameterframställning för } \Gamma} = \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt}_{\text{med parameterframställning för } \Gamma}$$

Exempel 4.1. Beräkna $\int_{\Gamma} y ds$ där Γ är parabeln $x = 2y^{3/2}$ mellan $A(0, 0)$ och $B(2, 1)$.

Lösning. Med parameterframställning $\mathbf{r} = (x, y) = (2y^{3/2}, y)$, $0 \leq y \leq 1$, fås linjeelement $ds = \sqrt{9y + 1} dy$, alltså

$$\int_{\Gamma} ds = \int_0^1 \sqrt{9y + 1} dy = \frac{1}{9} \int_1^{10} t^{1/2} dt = \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

Exempel 4.2. Beräkna längden av kurvan Γ som ges i planpolära koordinater av $\rho = \sin \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Lösning. Med parameterframställning $\mathbf{r} = (x, y) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = (\sin \phi \cos \phi, \sin^2 \phi) = \frac{1}{2}(\sin 2\phi, 1 - \cos 2\phi)$ fås linjeelement $ds = \frac{1}{2}\sqrt{4 \sin^2 2\phi + 4 \cos^2 2\phi}d\phi = d\phi$, alltså

$$\int_{\Gamma} ds = \int_0^{\pi} d\phi = \pi.$$

(Obs. att Γ ges av $x^2 + y^2 = y$, alltså är en cirkel!)

4.2. Kurvintegraler

Ett annat exempel är arbete som utförs av kraftfältet \mathbf{F} vid en förflyttning längs kurvan i föreskriven riktning. Observera att bara storleken på den del av \mathbf{F} som pekar i tangentvektors riktning har betydelse (den kallas **kraftkomponent i kurvans tangentriktning**). Som bekant ges den av projectionsformeln:

$$\mathbf{F}_{\parallel \mathbf{r}'} = \frac{\mathbf{F} \bullet \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^2} \mathbf{r}'$$

Ett infinitesimalt arbete ges då av

$$dW = \mathbf{F}_{\parallel \mathbf{r}'} \bullet d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{F} \bullet \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^2} |\mathbf{r}'|^2 dt = \mathbf{F} \bullet \mathbf{r}' dt = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

vilket ger för det totala arbetet

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt.$$

Denna integral är ett exempel av det som man kallar *kurvintegraler* eller *linjeintegraler*. Obervera att Ortsvektordifferentialen kan skrivas på flera olika sätt, t. ex.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt = (x'(t), y'(t)) dt = (dx, dy).$$

Allmänt definierar man en linjeintegral för en orienterad kurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t : \alpha \rightarrow \beta$ (i planet eller i rummet) och ett vektorfält $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ med hjälp av

$$\underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}}_{\text{utan parameterframställning för } \Gamma} = \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt}_{\text{med en parameterframställning för } \Gamma} = \underbrace{\int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy}_{\text{m.h.a. differentier}}$$

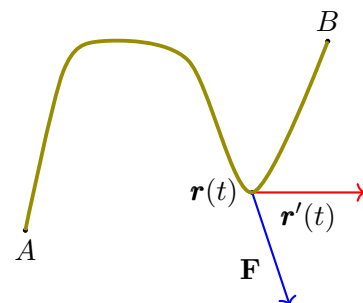
Sats 3. Om $-\Gamma$ är en omvänd genomloppsriktning då gäller att

$$\int_{-\Gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Om $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$ är summa av parameterkurvorna Γ_i då har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \dots + \int_{\Gamma_n} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Exempel 4.3. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = y \hat{x} - x \hat{y}$ och Γ är kurvan $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ med $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, $x : 2 \rightarrow 0$ och $\Gamma_2 : y = 0$, $x : -2 \rightarrow 2$.



Lösning. För Γ_i väljer vi Ortsvektorns \mathbf{r} parametrering

$$\Gamma_1 : \mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t : 0 \rightarrow \pi,$$

$$\Gamma_2 : \mathbf{r}(s) = (s, 0), \quad s : -2 \rightarrow 2,$$

alltså $\mathbf{A}|_{\Gamma_1} = (2 \sin t, -2 \cos t)$ och $\mathbf{A}|_{\Gamma_2} = (0, -2s)$, vilket ger

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^\pi (2 \sin t, -2 \cos t) \bullet (-2 \sin t, 2 \cos t) dt = \int_0^\pi -4 dt = -4\pi,$$

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \int_{-2}^2 (0, -s) \bullet (1, 0) ds = 0,$$

och följaktligen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = -4\pi$.

Exempel 4.4. Beräkna $\int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy}{x + y}$ längs $\Gamma : y = 3x, x : 2 \rightarrow 4$.

Lösning. För Γ väljer parameterframställning $\mathbf{r}(t) = (t, 3t), t : 2 \rightarrow 4$, vilket ger

$$\int_{\Gamma_1} \frac{x dx + y dy}{x + y} = \int_2^4 \frac{t \cdot dt + 3t \cdot 3dt}{t + 3t} = \int_2^4 \frac{10t dt}{4t} = \frac{5}{2} \cdot (4 - 2) = 5.$$

4.3. Slutna och enkla kurvor. Greens formel

Definition 4.1. En orienterad kurva Γ som ges av $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta$, är en **sluten** kurva om startpunkt $\mathbf{r}(\alpha)$ och slutpunkt $\mathbf{r}(\beta)$ är samma punkt, dvs $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$.

En sluten kurva kan mycket väl bestå av flera delkurvor. För att eliminera ‘vilda’ situationer ska vi studera bara de slutna kurvor som omslutar ett område i planet. Mer konkret har vi följande definition.

Definition 4.2. En orienterad kurva Γ som ges av $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta$, är en **enkel** kurva om den inte skär sig själv, dvs $\mathbf{r}(s) \neq \mathbf{r}(t)$ för alla $t \neq s, t, s \in [\alpha, \beta]$. Med andra ord ger alla parametervärden *olika* punkter. En **åtta** “8” (Lemniskata) är tydligen inte enkel, ty den skär sig själv i en punkt.

OBS! En enkel sluten kurva Γ begränsar ett område D , dvs Γ är randen till D .

Definition 4.3. En enkel sluten orienterad kurva $\Gamma = \partial D$ genomlöps i **positiv led** om den går **moturs** kring D (på vänster sida om man följer i positiv riktning); annars är den **negativt orienterad**.

Vi vet att (under vissa förutsättningar) en ytintegral kan skrivas som en tripelintegral med hjälp av Gauss' sats. Analogt finns det ett sätt att beräkna en *kurvintegral* över ett vektorfält som en dubbelintegral, det kallas Greens sats.

Sats 4 (Greens formel). Om vektorfältet $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ har kontinuerliga partiella derivator P'_y och Q'_x överallt i ett område D innanför den enkla slutna orienterade kurvan Γ som genomlöps i positiv led och är rand till området D , så kan kurvintegralen beräknas som följande dubbelintegral:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

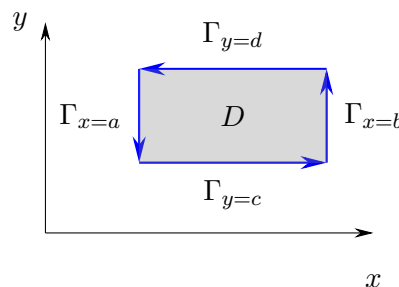
Bevis för ett partiellt fall när D är en rektangel:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

i vilket fall randen Γ har en naturlig uppdelning

$$\Gamma = (-\Gamma_{y=c}) + \Gamma_{x=b} + \Gamma_{y=d} + (-\Gamma_{x=a}),$$

där $\Gamma_{x=t}$ är segmentet med orientering i x -axel riktning och $\Gamma_{y=t}$ är segmentet med orientering i y -axel riktning. Så att integralerna i Greens formel kan skrivas enligt följande:



$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = - \int_a^b P(x, c) dx + \int_c^d Q(b, y) dy + \int_a^b P(x, d) dx - \int_c^d Q(a, y) dy \quad (4.1)$$

Å andra sidan,

$$\begin{aligned} \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy - \int_a^b (P(x, d) - P(x, c)) dx \end{aligned}$$

vilket ger samma resultat som i (4.1), vilket skulle bevisas.

Exempel 4.5. Beräkna integralen i Exempel 4.3 m.h.a. Greens formel.

Lösning. I det här fallet, $\Gamma = \partial D$, där området D ges av $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$, och Γ är positivt (moturs) orienterade, alltså

$$\int_{\Gamma} (y dx - x dy) = \iint_D \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy = -2 \iint_D dx dy = -2 \text{Area}(D) = -2 \cdot \frac{2^2 \pi}{2} = -4\pi$$

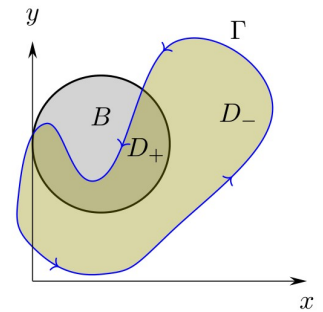
Observera att allmänt gäller

$$\int_{\partial D} (x dy - y dx) = \text{Area}(D), \quad \partial D \text{ genomlöps i positiv led}$$

Exempel 4.6 (N. (5.16)). Vektorfältet $\mathbf{A}(x, y) = \left(\frac{1}{3}y^3 - 2xy + 4y, -\frac{1}{3}x^3 + 4xy \right)$ är givet. Bestäm den slutna kurva Γ i xy -planet som gör att $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, tagen ett varv i positiv led, blir så stor som möjligt. Beräkna även detta maximala värde.

Lösning. Med hjälp av Greens formel fås

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial(-\frac{1}{3}x^3 + 4xy)}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{1}{3}y^3 - 2xy + 4y)}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= - \iint_D (x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4) dx dy = \\ &= \iint_D \underbrace{(1 - (x-1)^2 - (y-2)^2)}_{=: f(x,y)} dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{D_+} f(x, y) dx dy + \iint_{D_-} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$



där $D_+ = D \cap B$, $D_- = D \setminus D_+$, och $B = \{(x, y) : f(x, y) \leq 0\}$ är cirkelskivan med radien 1 och mittpunkten i $(1, 2)$. Observera att $f(x, y) \geq 0$ i D_+ (faktiskt i hela B) och ytterligare $f(x, y) \leq 0$ i D_- , alltså

$$I = \iint_{D_+} f(x, y) dx dy + \underbrace{\iint_{D_-} f(x, y) dx dy}_{\text{negativt}} \leq \iint_{D_+} f(x, y) dx dy \leq \iint_B f(x, y) dx dy =$$

$$= \iint_B (1 - (x-1)^2 - (y-2)^2) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = 1 + \rho \cos \phi, \\ y = 2 + \rho \sin \phi, \\ 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho d\phi = \frac{\pi}{2}$$

Det innebär att alltid gäller $I \leq \frac{\pi}{2}$ (dvs $\frac{\pi}{2}$ är det **maximala värde**) och I är exakt lika med $\frac{\pi}{2}$ om och endast om den negativa biten saknas (dvs $D_- = \emptyset$) och **ytterligare** $D_+ = B$ vilket medför att den optimala kurvan Γ är cirkeln $\Gamma = \partial B$ som ges av $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$.

Kurvintegraler i rummet. Stokes formel

5.1. Kurvintegraler i \mathbb{R}^3

Observera att definition och beräkning av kurvintegraler i rummet \mathbb{R}^3 är analogt till det i planet, dvs alla definitioner i kapitel 4.1 gäller fullständigt här. Vi ska studera ett inledande exempel.

Definition 5.1. Kurvintegralen längs en sluten enkel kurva brukar kallas **cirkulationen** av vektorfältet.

Exempel 5.1. Betrakta skärningslinjen Γ mellan $z = x^2 + y^2$ och $2x + 2y + z = 2$, orienterad moturs från $(0, 0, 10)$ (positiva z -axeln). Beräkna cirkulationsintegral $\int_{\Gamma} z dx$.

Lösning. Skärningslinjen fås ur substitutionen av $z = x^2 + y^2$ i ekvationen $2x + 2y + z = 2$, vilket ger

$$\begin{aligned} 2x + 2y + x^2 + y^2 &= 2 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

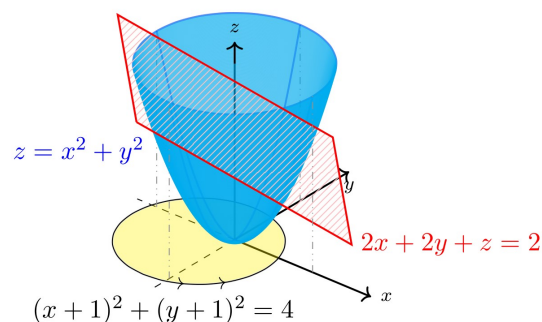
där den sista ekvationen beskriver cirkeln C med mittpunkt i $(-1, -1)$ och radien 2 (gula cirkeln i figuren). Det betyder att skärningslinjen Γ ären ellips som ligger i planet $2x + 2y + z = 2$ (med projektionen C i xy -planet).

Parameterframställning för Γ är

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2 \cos t \\ y &= -1 + 2 \sin t \\ z &= 6 - 4 \cos t - 4 \sin t \end{aligned}$$

med orientering $t : 0 \rightarrow 2\pi$, alltså

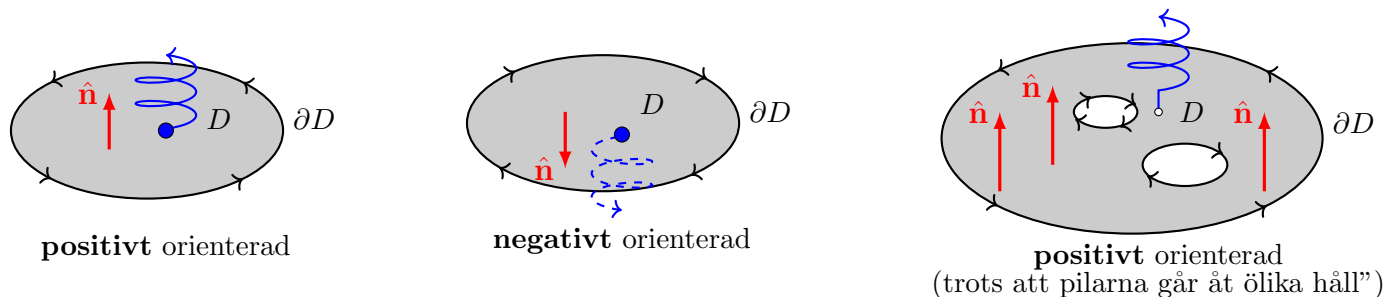
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} z dx &= \int_0^{2\pi} (6 - 4 \cos t - 4 \sin t) d(-1 + 2 \cos t) = \\ &= \int_0^{2\pi} (8 \sin t \cos t + 8 \sin^2 t - 12 \sin t) dt = 8 \cdot 0 + 8 \cdot \pi - 12 \cdot 0 = 8\pi. \end{aligned}$$



Kurvintegralen ovan är emelrtid lite komplicerad. Det visar sig att en matematisk relation som benämns **Stokes sats (formel)** kan vara till hjälp här. Stokes sats sammankopplar nämligen flödesintegralen av ett vektorfältets **rotation** med linjeintegralen av vektorfältet längs ytans randkurva.

5.2. Stokes sats

Definition 5.2. Låt S vara en orienterad yta, dvs en yta med ett tilldelat normalfält \mathbf{n} . Låt $\Gamma = \partial S$ vara randkurvan till S . Kurvan Γ sägs ha **positiv orientering**, eller **positiv omloppsriktning** (i förhållande till den orienterade ytan S) om S ligger till vänster om Γ då man går runt Γ med en pil riktad i samma riktning som \mathbf{n} . Alternativt, **korkskruvregeln** gäller, se figuren. Observera att inre komponenter av randkurvan (i fall om de finns) har omvänd orientering.



Sats 5 (Stokes sats). Om S är en yta som begränsas av en enkel sluten kurva (kan bestå av några komponenter) orienterade med positiv omloppsriktning och om $\mathbf{A} = (P, Q, R) \in C^1$ på hela ytan S inklusiv Γ så gäller

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \cdot \mathbf{n} \, dudv = \iint_D \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \, dudv,$$

där $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$.

Vi nämner **speciellfall** då $S = D$ ligger i xy -planet, dvs

$$S : \mathbf{r} = (x, y, 0), \quad (x, y) \in D.$$

I detta fall gäller

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1) = \hat{z}$$

alltså kommer vi fram **Greens formel**:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \, dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dxdy$$

(observera att i så fall är Γ orienterad moturs sett från positiv z -axeln).

Exempel 5.2. Beräkna kurvintegralen i Exempel 5.1 med hjälp av Stokes formel.

Lösning. Observera att kurvan Γ är skärningslinjen mellan två ytor: $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - 2x - 2y$, vilket medför att Γ tillhör **bägge** ytor och, följaktligen, kan vi betrakta två olika alternativ.

(Alternativ 1) Γ är randkurvan till ytan (paraboloiden) $S: z = f(x, y) = x^2 + y^2$ över området $D = \{(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}$ med normalvektorn

$$\mathbf{n} = (-f'_x, -f'_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$$

som orienterad uppåt (dvs $\mathbf{n} \cdot \hat{z} > 0$) \Rightarrow gäller Stokes formel:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} z \, dx &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dx dy = \iint_D \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx dy = \iint_D (0, 1, 0) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx dy = \\ &= -2 \iint_D y \, dx dy = \begin{vmatrix} x = -1 + \rho \cos \phi, \\ y = -1 + \rho \sin \phi, \\ 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{vmatrix} = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-1 + \rho \sin \phi) \rho \, d\rho d\phi = 8\pi \end{aligned}$$

(Alternativ 2) Γ är randkurvan till ellipsen S_1 som ligger i planet $2x + 2y + z = 2$ för $(x, y) \in D$, vilket ger beräkningarna lite enklare: normalvektor till planet fås ur normalform som $\mathbf{n} = (2, 2, 1)$ (orienterad uppåt), alltså

$$\oint_{\Gamma} z \, dx = \iint_D \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (2, 2, 1) \, dx dy = \iint_D (0, 1, 0) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \, d\rho d\phi = 8\pi$$

Exempel 5.3. Visa med hjälp av Stokes sats att $\oint_{\Gamma} \phi \, dr = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi$

Lösning. Observera att kurvintegralen I i vänster led är en **vektoriell** kvantitet. För att bestämma den söker vi dess projektioner på koordinatvektorerna \hat{x} , \hat{y} och \hat{z} . Exempelvis,

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot I &= \hat{x} \cdot \oint_{\Gamma} \phi \, dr = \oint_{\Gamma} \phi \hat{x} \cdot dr = (\text{Stokes' sats}) = \iint_S \nabla \times (\phi \hat{x}) \cdot d\mathbf{S} = (\text{formel (8) i Formelsamling}) = \\ &= \iint_S \phi \underbrace{(\nabla \times \hat{x})}_{=0} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S (\nabla \phi \times \hat{x}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \phi \times \hat{x}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= (\text{eftersom } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) = \iint_S (d\mathbf{A} \times \nabla \phi) \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot \iint_S (d\mathbf{A} \times \nabla \phi), \end{aligned}$$

vilket medför den önskade likheten. □

Exempel 5.4 (Singulärt vektorfält). Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{där} \quad \mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \quad (5.1)$$

och Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

Lösning 1. (Fel lösning) En standardräkning ger $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, alltså

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

där S är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$ i planet $z = 0$.

Lösning 2. (Korrekt lösning) Observera att \mathbf{A} är ett singulärt vektorfält i cirkelskivan S , så att Stokes sats är ogiltig där. Istället har vi via definition: $\mathbf{r} = (2 \cos \phi, 2 \sin \phi)$, $\phi : 0 \rightarrow 2\pi$,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) \, d\phi = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{-\sin \phi}{2} \\ \frac{\cos \phi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \sin \phi \\ 2 \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \, d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi. \quad (5.2)$$

Exempel 5.5 (Singulärt vektorfält, TATA44 2022-10-25). Beräkna kurvintegralen (5.1), där Γ är skärningskurvan mellan planet $x + 2y + 3z = 10$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

Lösning. Integralberäkning via definition är krånglig eftersom parametrisering av ellipsen Γ är icke-trivial, vi använder Stokes formel istället. En standardräkning ger $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Observera att för Γ gäller $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, och

$$z = \frac{1}{3}(10 - x - 2y) = \frac{1}{3}(10 - (2 \cos t + 4 \sin t)) = \frac{1}{3}(10 - \sqrt{20} \sin(t + \alpha)) > 0.$$

Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 2$, $z = 0$. Kurvan $\Gamma + (-\Gamma_1)$ utgör randen till en yta S (där Γ och Γ_1 genomlöps i **samma positiva riktning**, d.v.s. moturs sett från $(0, 0, 17)$) på vilken \mathbf{A} är C^1 och $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Enligt Stokes sats har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma + (-\Gamma_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

och av detta följer det att $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Vi parametriserar Γ_1 genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = 2 \cos \phi \hat{x} + 2 \sin \phi \hat{y}$ med $\phi : 0 \rightarrow 2\pi$. Vi får nu

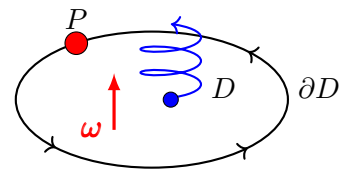
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) = \left(\frac{-2 \sin \phi}{4}, \frac{2 \cos \phi}{4}, 0 \right)$$

och fortsätter som i (5.2): $\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \dots = 2\pi$.

5.3. Rotationen

Analogt till divergens kan man definiera rotationen av ett vektorfält vi **koordinatfria** framställning.

För att få en geometrisk och fysikalisk tolkning av rotationen kan vi använda ett enkelt exempel. Vi tänker oss en punkt P som rör sig i en cirkel av radien R med konstant **vinkelhastighet** ω som i figuren till höger. Förelsen antas vara i xy -planet med centrum i origo. Vi kan *associera* en vektor $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$ med vinkelhastighet pekande vinkelrät mot rotationsplanet och orienterad enligt högerhandsregeln.



Vi kan beräkna nu punktes P 's hastighet \mathbf{v} och bilda dess rotation. För att beräkna hastigheten är det lämpligt att först bilda Ortsvektorn \mathbf{r} och sedan ta tidsderivatan av \mathbf{r} . Vinkeln ϕ för punktens position uttryckas som $\phi = \omega \cdot t$, alltså

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + 0\hat{z} = R \cos \omega t \hat{x} + R \sin \omega t \hat{y} \\ \mathbf{v} = \mathbf{r}' &= R\omega(-\sin \omega t \hat{x} + \cos \omega t \hat{y}) = \omega(-y\hat{x} + x\hat{y} + 0\hat{z}) \end{aligned}$$

Nu kan vi beräkna **hastighetsfältets rotation**:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \hat{z} = 2\boldsymbol{\omega},$$

vi har alltså $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v})$. Sista ekvationen visar på ett tydligt samband mellan hastighetsfältets \mathbf{v} vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$ och hastighetsfältets rotation. Inom strömmingsmekaniken benämns $\nabla \times \mathbf{v}$ **vorticiteten** och mäter alltså vätskors (eller gasers) tendens att bilda **virvlar**.

Å andra sidan kan man härleda (analogt till divergensens fysikalisk definition i kapitel 3.1) att rotationen av ett vektorfält \mathbf{F} i en punkt P kan beräknas som gränsvärdet

$$(\nabla \times \mathbf{F})(P) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{\text{Area}(S) \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(S)} \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där linjeintegralen beräknas längs sluten kurva Γ som begränsar området S nära punkten P . Denna ekvation definierar **komponenten** av rotationen av \mathbf{F} **längs normalriktningen** $\hat{\mathbf{n}}$. De infinitesimala ytorna S som begränsas av Γ har normalriktningen $\hat{\mathbf{n}}$ som är orienterad via högerregeln.

Potentialfält

Betrakta $\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, där Γ är en kurva i planet från en punkt A till en annan punkt B . Det beror oftast på vägen

Koordinattransformationer. Krokinjiga koordinater

7.1. Krokinjiga koordinater

Betrakta rummet \mathbb{R}^3 med en ON (ortonormerade) bas $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, se (1.1). Då skrivs Ortsvektorn som

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}X \quad \text{där } (X \text{ är koordinatmatrisen för } \mathbf{r})$$

Definition 7.1. Speciellt i det här fallet kallas koordinatsystem $\mathbf{r} \rightarrow X$ ett **kartesiskt koordinatsystem**.

Betrakta vidare två ON baser $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$ och $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3)$. Då gäller sambandet

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T, \quad T \text{ är transformationsmatrisen}$$

där $TT^t = T^tT = I$ (enhetsmatris av ordning 3), med andra ord är $\mathbf{x} \rightarrow T\mathbf{x}$ **isometrisk** avbildning:

$$T\mathbf{x} \bullet T\mathbf{x} = (T\mathbf{x})^t T\mathbf{x} = \mathbf{x}^t T^t T\mathbf{x} = \mathbf{x}^t \mathbf{x} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x},$$

dvs en avbildning som bevarar avståndet mellan punkter.

Nu kommer vi att generalisera det för en allmän C^1 -avbildning. Antar att en C^1 -avbildning (eller **koordinattransformation**) $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ är injektiv, dvs två olika punkter avbildas till två olika punkter, och att man kan lösa ut gamla kartesiska koordinater (x, y, z) mha det nya koordinatsystemet:

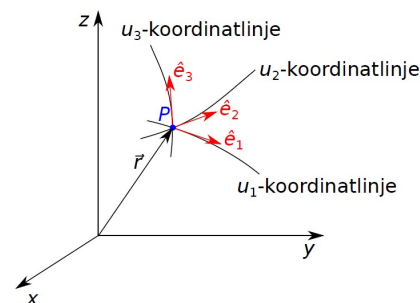
$$\begin{cases} u_1 = f_1(x, y, z) \\ u_2 = f_2(x, y, z) \\ u_3 = f_3(x, y, z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g_1(u_1, u_2, u_3) \\ y = g_2(u_1, u_2, u_3) \\ z = g_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

Då associerar den med varje punkt $P(x, y, z)$ en taltrippel (u_1, u_2, u_3) , P 's krokinjiga koordinater.

Om man varierar en av koordinaterna, men håller de övriga två fixerade, fås en **koordinatlinje**. Exempelvis x -koordinatlinjen i kartesiska koordinatsystem fås via

$$y = 0, \quad z = 0 \quad \Leftrightarrow x\text{-axeln,}$$

med andra ord som skärningslinje mellan koordinatplanen $y = 0$ och $z = 0$. Analogt kan man definiera **krokinjiga koordinatlinjer**, t.ex. koordinatlinjen u_1 som skärningslinjen mellan koordinatplanen $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$, eller mer allmänt $u_2 = C_2$ och $u_3 = C_3$.



Definition 7.2. En **injectiv** (dvs ett ett-till-ett samband) C^1 -avbildning (eller koordinattransformation) kallas ett **kroklinjigt koordinatsystem**. Ett kroklinjigt koordinatsystem kallas **ortogonalt** om dess koordinatlinjer i varje punkt skär varandra i räta vinklar.

u_1 -koordinatlinjen ges av $u_2 = C_2$ och $u_3 = C_3$ (konstanter), dvs $du_2 = du_3 = 0$, vilket ger

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 \quad \text{längs } u_1\text{-koordinatlinjen,}$$

således är tangentvektorn till u_i -koordinatlinjen $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$ parallel med den u_1 -koordinatlinjen. För ett kroklinjigt *ortogonalt* koordinatsystem gäller således att

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (7.1)$$

Sats 6. Ett kroklinjigt system $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ är ortogonalt om och endast om

$$\nabla u_i(\mathbf{r}) \bullet \nabla u_j(\mathbf{r}) = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (7.2)$$

Bevis. Om ett kroklinjigt koordinatsystem är ortogonalt då u_i -koordinatplan i varje punkt är parvis ortogonala. Å andra sidan är ∇u_i ortogonal mot u_i -nivåytan, dvs u_i -koordinatytan. \square

Ovanstående tangentvektorer bildar alltså en **ortogonal** bas (obs, ej ortonormerad!). Om vi dessutom *normerar* tangentvektorerna får vi, i varje punkt, de **ortonormerade basvektorerna**

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}_{u_i} := \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i},$$

där h_i är **skalfaktorer**, definierade som

$$h_i = h_{u_i} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|.$$

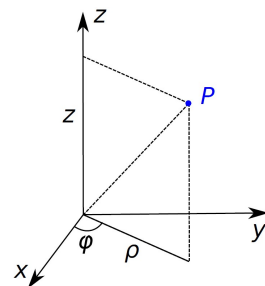
Observera att de kroklinjiga basvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_{u_i}$ är ej konstanta (fixerade) i allmänhet! Basvektorn $\hat{\mathbf{e}}_{u_i}$ beror, som regel på u_1, u_2, u_3 .

Exempel 7.1 (Cylindriska koordinater). Vi utnyttjar sambandet mellan de kartesiska och de cylindriska koordinaterna till att uttrycka Ortsvektorn som en funktion av de senare, dvs ρ, ϕ, z :

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$$

med transformationsekvationer

$$(\rho, \phi, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}, z).$$



Ur ovanstående relation fås basvektorerna, resp. skalfaktorerna, resp. ortonormerade basvektorerna:

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_\rho = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \\ \mathbf{r}'_\phi = (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0) \\ \mathbf{r}'_z = (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_\rho = |\mathbf{r}'_\rho| = 1 \\ h_\phi = |\mathbf{r}'_\phi| = \rho \\ h_z = |\mathbf{r}'_z| = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\rho} = \hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \mathbf{r}'_\rho = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \mathbf{r}'_\phi = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{1}{h_z} \mathbf{r}'_z = \hat{z} \end{cases} \quad (7.3)$$

vilket ger transformationsformler

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases} \quad \text{och} \quad \mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}.$$

Exempel 7.2 (Sfäriska koordinater). Analogt fås $\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$ med

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_r = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \\ \mathbf{r}'_\theta = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, -r \sin \theta) \\ \mathbf{r}'_\phi = (-r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi \sin \theta, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_r = |\mathbf{r}'_r| = 1 \\ h_\theta = |\mathbf{r}'_\theta| = r \\ h_\phi = |\mathbf{r}'_\phi| = r \sin \theta. \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\begin{cases} \hat{r} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \\ \hat{\theta} = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta) \\ \hat{\phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \end{cases} \quad \text{och } \mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \hat{r}.$$

7.2. Vektorfält och Ortsvektordifferentialen

Sats 7. Ortsvektordifferentialen $d\mathbf{r}$ från punkten (u_1, u_2, u_3) till $(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ ges av

$$d\mathbf{r} = h_1 \hat{\mathbf{e}}_{u_1} du_1 + h_2 \hat{\mathbf{e}}_{u_2} du_2 + h_3 \hat{\mathbf{e}}_{u_3} du_3 \quad (7.5)$$

Bevis. Fås ur kedjeregeln:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_{u_i} du_i \quad (7.6)$$

□

I ett kroklinjigt ortogonalt koordinatsystem (u_1, u_2, u_3) , skrivs vektorfältet \mathbf{A} som

$$\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^3 A_i(u_1, u_2, u_3) \hat{\mathbf{e}}_{u_i}$$

Exempel 7.3. Exempelvis, ges det bekanta vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ (**virveln**) i cylindriska koordinater ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho, \phi, z) &= -\frac{\rho \sin \phi}{\rho^2} \hat{x} + \frac{\rho \cos \phi}{\rho^2} \hat{y} = (\text{transformationsformler}) \\ &= -\frac{\sin \phi}{\rho} (\cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}) + \frac{\cos \phi}{\rho} (\sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}) \\ &= \frac{1}{\rho} \hat{\phi}. \end{aligned}$$

Vi förutsätter att de kroklinja koordinaterna ordnats på ett sådant sätt att $\hat{\mathbf{e}}_{u_1}, \hat{\mathbf{e}}_{u_2}, \hat{\mathbf{e}}_{u_3}$ bildar ett **högersystem** i varje punkt, dvs att $\hat{\mathbf{e}}_{u_1} \times \hat{\mathbf{e}}_{u_2} = \hat{\mathbf{e}}_{u_3}$ gäller cykliskt. Då gäller även de vanliga uttrycken

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^3 A_i B_i, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{u_1} & \hat{\mathbf{e}}_{u_2} & \hat{\mathbf{e}}_{u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

7.3. Linjeelement och räkneregler i kroklinjiga koordinater

Som är bekant, ges linjeelement av

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|^2,$$

således fås ur (7.6) i ett **orthogonalt** kroklinjigt koordinatsystem att

$$ds^2 = \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_{u_i} du_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_{u_i} du_i \right) = \sum_{i=1}^3 h_i^2 du_i^2 \quad (7.7)$$

I **cylindriska koordinater**:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (7.8)$$

resp. i **sfäriska koordinater**:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2. \quad (7.9)$$

Exempel 7.4. Exempelvis vill man beräkna båglängden av kurvan (**helix**) Γ som i cylindriska koordinater ges av

$$\rho = 1, \quad z = 2t, \quad \phi = t : 0 \rightarrow 2\pi.$$

Ur (7.8) fås $ds^2 = dt^2 + 4dt^2 = 5dt^2$, alltså $ds = \sqrt{5}|dt|$,

$$\text{längden} = \int_{\Gamma} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{5} dt = 2\sqrt{5}\pi.$$

Samma kurva i kartesisiska koordinater ges av

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) = (\cos t, \sin t, 2t), \quad t : 0 \rightarrow 2\pi,$$

alltså $ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = |(-\sin t, \cos t, 2)|^2 dt^2 = 5dt^2$, vilket medför samma svar.

Ytterligare ges **gradient** av en funktion $f(u_1, u_2, u_3)$, **divergence** och **rotation** av ett vektorfält

$$\mathbf{A} = A_1 \hat{\mathbf{e}}_{u_1} + A_2 \hat{\mathbf{e}}_{u_2} + A_3 \hat{\mathbf{e}}_{u_3}$$

i kroklinjiga koordinater (u_1, u_2, u_3) av

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(u, v, w) &= \hat{\mathbf{e}}_{u_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \hat{\mathbf{e}}_{u_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \hat{\mathbf{e}}_{u_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \\ \operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_1 h_2) \right] \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{e}}_{u_1} & h_2 \hat{\mathbf{e}}_{u_2} & h_3 \hat{\mathbf{e}}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Exempel 7.5 (Exempel 7.3 forts.). Divergensen och rotationen av $\mathbf{A}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \hat{\phi} = (0, \frac{1}{\rho}, 0)$ ges av

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{1 \cdot \rho \cdot 1} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (0 \cdot \rho \cdot 1) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \cdot 1 \cdot 1 \right) + \frac{\partial}{\partial z} (0 \cdot 1 \cdot \rho) \right] = 0$$

och

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{1 \cdot \rho \cdot 1} \begin{vmatrix} 1 \cdot \hat{\rho} & \rho \cdot \hat{\phi} & 1 \cdot \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho \cdot \frac{1}{\rho} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Integraler i kroklinjiga koordinater

Vårt mål är att skriva följande integraler i ett kroklinjigt koordinatsystem:

- (A) Volymintegraler
- (B) Linjeintegraler
- (C) Ytintegraler

8.1. Volymintegraler

Vi ska undersöka integralen $\iiint_V \Phi(x, y, z) dx dy dz$ i ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(u_1, u_2, u_3) = \begin{cases} x = g_1(u_1, u_2, u_3) \\ y = g_2(u_1, u_2, u_3) \\ z = g_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases} : E \rightarrow V$$

som översätter varje punkt i u_1, u_2, u_3 -rummet till en punkt i det tredimensionella rum som spänns upp av de kartesiska basvektorerna. En infinitesimal låda med kantlängderna du_1, du_2, du_3 i u_1, u_2, u_3 -rummet ger på detta sätt upphov till en parallelepiped i xyz -rummet. Parallelepipeden spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{r}'_{u_i} du_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i du_i$$

och har volymen

$$\begin{aligned} dV &= |(\mathbf{r}'_{u_1} du_1 \times \mathbf{r}'_{u_2} du_2) \bullet \mathbf{r}'_{u_3} du_3| = \\ &= (h_1 \hat{\mathbf{e}}_1 du_1 \times h_2 \hat{\mathbf{e}}_2 du_2) \bullet h_3 \hat{\mathbf{e}}_3 du_3 = \\ &= h_1 h_2 h_3 (\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2) \bullet h_3 \hat{\mathbf{e}}_3 du_1 du_2 du_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \end{aligned}$$

Alltså

$$\iiint_V \Phi(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E \Phi(\mathbf{g}(u_1, u_2, u_3)) h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3.$$

Med andra ord, blir volymskalan lika med produkten av de tre skalfaktorerna h_i . Jämför med flervariabelanalys:

$$\iiint_V \Phi(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E \Phi(\mathbf{g}(u_1, u_2, u_3)) \left| \frac{d(g_1, g_2, g_3)}{d(x, y, z)} \right| du_1 du_2 du_3.$$

med motsvarande funktionaldeterminant

$$\frac{d(g_1, g_2, g_3)}{d(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \frac{\partial g_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \frac{\partial g_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u_1} & \frac{\partial g_3}{\partial u_2} & \frac{\partial g_3}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

Exempel 8.1 (Sfäriska (rymdpolära) koordinater). Vi vet från (7.9) att $h_r = 1$, $h_\theta = r$ och $h_\phi = r \sin \theta$, vilket ger den bekanta jakobianen:

$$h_r h_\theta h_\phi = r^2 \sin \theta$$

Exempel 8.2 (Cylinderkoordinater). Analogt fås ur (7.3) att $h_\rho = 1$, $h_\phi = \rho$ och $h_z = 1$, vilket ger

$$h_\rho h_\phi h_z = \rho$$

8.2. Linjeintegraler

Vi söker linjeintegralen $\int_\Gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r}$. Parameterframställningen av rymdkurvan Γ ges som

$$\mathbf{r} : \begin{cases} u_1 = f_1(t) \\ u_2 = f_2(t) \\ u_3 = f_3(t) \end{cases}, \quad t : a \rightarrow b,$$

Med denna parameterframställning och (7.5) fås att

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} &= \int_\Gamma (F_1 \hat{\mathbf{e}}_{u_1} + F_2 \hat{\mathbf{e}}_{u_2} + F_3 \hat{\mathbf{e}}_{u_3}) \bullet (h_1 \hat{\mathbf{e}}_{u_1} du_1 + h_2 \hat{\mathbf{e}}_{u_2} du_2 + h_3 \hat{\mathbf{e}}_{u_3} du_3) \\ &= \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^3 F_i h_i f'_i(t) \right) dt \end{aligned}$$

I ovanstående generella uttryck är både F_i och h_i funktioner av u_1, u_2, u_3 , dvs $F_i(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ etc.

Exempel 8.3. Beräkna $\int_\Gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r}$ där Γ i cylinderkoordinater ges av $\rho = 2$, $\phi = z = t : 0 \rightarrow 4\pi$, och $F(\rho, \phi, z) = \frac{2z}{z^2+4} \hat{\mathbf{z}} + \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$.

Lösning. I cylinderkoordinater $h_\rho = 1$, $h_\phi = \rho$ och $h_z = 1$, alltså ortsvektorsdifferentialen

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \hat{\rho} d\rho + \rho \cdot \hat{\phi} d\phi + \hat{z} dz = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \hat{\phi} dt + \hat{z} dt = (2\hat{\phi} + \hat{z}) dt, \\ \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \left(\frac{2t}{t^2+4} \hat{\mathbf{z}} + t \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \bullet (2\hat{\phi} + \hat{z}) dt = \left(2t + \frac{2t}{t^2+4} \right) dt, \\ \int_\Gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_0^{4\pi} \pi \left(2t + \frac{2t}{t^2+4} \right) dt = [t^2 + \ln(t^2+4)]_0^{4\pi} = 16\pi^2 + \ln(4\pi^2+1) \end{aligned}$$

□

Exempel 8.4 (8.21 [NH].) Beräkna $\oint_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ om $\mathbf{A} = \rho \hat{\boldsymbol{\phi}}$ och Γ är skärningslinjen mellan planet $y + 2z = 1$ och konen $\rho + z = 1$ (orientering moturs sett från $(0, 0, 100)$).

Lösning. Med hjälp av Stokes formel

$$\oint_\Gamma \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet d\mathbf{S}$$

och i cylinderkoordinater

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot \rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho \cdot \rho & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\rho \hat{z}}{\rho} = 2\hat{z},$$

och S är del av planet $y + 2z = 1$ som fås från konen $z + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$, vilket ger efter elimination av z att $x^2 + y^2 = (2 - z)^2 = \frac{1}{4}(3 + y)^2$, ger $4x^2 + 3y^2 - 6y = 9$ och efter kvadratkomplettering slutligen ger

$$4x^2 + 3(y - 1)^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 = 1.$$

Sista ekvationen ger ellipsen med halvaxellängder $a = \sqrt{3}$ och $b = 2$. Parameterframställning för S är $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x, y, (1 - y)/2)$ alltså

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S 2\hat{z} \bullet d\mathbf{S} = \iint_D 2(0, 0, 1) \bullet (1, 1/2, 1) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2\text{Area}(D) = 2\pi ab = 4\pi\sqrt{3}.$$

□

8.3. Ytintegraler

Tänk att vi önskar beräkna flödesintegralen över en yta S , som beskrivs av att **exakt en** av u_1, u_2, u_3 är konstant. Om, exempelvis, u_1 är konstant, kan S parametreras med u_2 och u_3 i ett område $D \subset \mathbb{R}^2$. Antar vidare att u_1, u_2, u_3 är högerorienterad, dvs $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3$ gäller cykliskt. Det vektoriella ytelementet ges då av

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS = \pm \mathbf{r}'_{u_2} \times \mathbf{r}'_{u_3} du_2 du_3 = \pm (h_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \times (h_3 \hat{\mathbf{e}}_3) du_2 du_3 = \pm \hat{\mathbf{e}}_1 h_2 h_3 du_2 du_3$$

Vi väljer, som vanligt, det tecknet (\pm) som ger en normal i överrensstämmelse med **ytans orientering**. Flödesintegralen kan nu slutligen beräknas som

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \pm \iint_D F_1 h_2 h_3 du_2 du_3$$

Allmänt gäller för ytan S_i som ges av $u_i = \text{konst}$ att

$$\begin{aligned} dS_1 &= h_2 h_3 du_2 du_3 \\ dS_2 &= h_3 h_1 du_3 du_1 \\ dS_3 &= h_1 h_2 du_1 du_2. \end{aligned}$$

Exempel 8.5 (Cylinderkoordinater). De infinitesimala ytelementen fås i cylinderkoordinater

$$\begin{aligned} dS_\rho &= \rho d\phi dz \\ dS_\phi &= \rho dz \\ dS_z &= \rho d\rho d\phi \quad (\text{planpolära koordinater!}). \end{aligned}$$

Exempel 8.6 (Sfäriska koordinater). De infinitesimala ytelementen fås i sfäriska koordinater

$$\begin{aligned} dS_r &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ dS_\theta &= r \sin \theta dr d\phi \\ dS_\phi &= r dr d\theta. \end{aligned}$$

Exempel 8.7. Beräkna i sfäriska koordinater flödesintegralen $\iint_S \mathbf{r} \bullet d\mathbf{S}$ där S ges av $x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Lösning. I sfäriska koordinater ges S av $r = 2$, och $D = \{0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$, dvs är S nivåytan av $u_1 = r$, alltså

$$\iint_S \mathbf{r} \bullet d\mathbf{S} = \pm \iint_D 1 \cdot r \cdot r \sin \theta d\theta d\phi = 2^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\phi d\theta = 4 \cdot \pi/2 = 2\pi.$$

Exempel 8.8 (Tentamen, TATA44 2023/10/24). Beräkna ytintegralen $\iint_S x^2 z dS$ där S är den del av konen $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger mellan planen $z = 2$ and $z = 4$.

Lösning. Observera ytan S är nivåytan i sfäriska koordinater: $z = r \cos \theta = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r \sin \theta$, dvs $\theta = \arctan \frac{1}{2}$, alltså $dS_\theta = r \sin \theta dr d\phi$. Ur Pythagoras sats fås att $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ och $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, och därmed

$$2 \leq z \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq r \cos \theta \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{5} \leq r \leq 2\sqrt{5},$$

och $0 \leq \phi \leq 2\pi$, vilket ger

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 z \underbrace{dS}_dS_\theta &= \iint_S (r \cos \phi \underbrace{\sin \theta}_{\frac{1}{\sqrt{5}}})^2 \cdot 2r \underbrace{\sin \theta}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} r \underbrace{\sin \theta}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} dr d\phi = \frac{2}{\sqrt{5}^4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi^2 d\phi \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} r^4 dr = \\ &= \frac{2\pi}{25} \cdot \frac{(2\sqrt{5})^5 - (\sqrt{5})^5}{5} = \frac{62\pi\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

□

8.4. Basvektornas differentier

Ofta ska man utnjuttja beräkningar som involverar basvektorernas ändring, när exempelvis man räknar hastigheter eller acceleration i kroklinjiga koordinater.

Exempelvis, fås basvektornas differentier i cylinderkoordinater enligt följande (se (7.3)):

$$\begin{aligned} d\hat{\rho} &= d(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) = (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y})d\phi = \hat{\phi} d\phi \\ d\hat{\phi} &= d(-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) = -(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})d\phi = -\hat{\rho} d\phi \\ d\hat{z} &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Exempel 8.9. En partikel rör sig på bana Γ som ges av $\rho = 2$, $\phi = \omega t$, $z = at$ i cylinderkoordinater. Bestäm hastighetsvektorn till kurvan Γ och även partikelns hastighet.

Lösning. Ortsvektor $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = 2\hat{\rho} + at\hat{z}$, alltså

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(2\hat{\rho} + at\hat{z}) = 2\frac{d\hat{\rho}}{dt} + a\hat{z} = \text{(m.h.a. (8.1))} \\ &= 2\hat{\phi}\frac{d\phi}{dt} + a\hat{z} = 2\omega\hat{\phi} + a\hat{z}. \end{aligned}$$

Vilket även ger för absolutbelopet:

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 = |2\omega\hat{\phi} + a\hat{z}|^2 = 4\omega^2 + a^2,$$

alltså hastigheten är $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{4\omega^2 + a^2}$.

Sakregister

Convex cropp, 15

divergens, 7

enhetsvektor, 4

enkelt sammanhängande mängd, 4

Gauss' sats, 12

Gradienten, 6

hastighetsfördelningen, 5

linjeelement, 5

nablaoperatorn, 7

Ortsvektordifferentialen, 5

potensialvektorfält, 7

potentialfunktion, 7

rotation, 7

sammanhängande mängd, 4

skalärfält, 5

Vectorproduct, 4

vektorfält, 5

vektorvärd funktion, 5