TATA44-250108 Lösningsförslag

(1) $\bar{A} = ay^2\hat{x} + b(3xy - z^2)\hat{y} + (3z^2 - 4yz)\hat{z}$, om $\bar{A}$ är ett potentialfält då ska $\bar{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i det område där $\bar{A}$ är definierat (alltså i $\mathbb{R}^3$ i vårt fall eftersom $\bar{A} \in C^1(\mathbb{R}^3)$). En potential finns då om $\nabla \times A = 0$ $\Leftrightarrow ((2b-4)z\,;\, 0\,;\, y(3b-2a)) = 0 \Leftrightarrow b = 2$ och $a = 3$. För dessa värden får vi

$$A = (3y^2;\ 6xy - 2z^2;\ 3z^2 - 4yz) = (\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z).$$

Ekvationen $\Phi'_x = 3y^2$ ger $\Phi = 3y^2x + h(y,z)$, insatt i $\Phi'_y = 6xy - 2z^2$ ger $6xy + h'_y(y,z) = 6xy - 2z^2 \Leftrightarrow h'_y(y,z) = -2z^2 \Leftrightarrow h(y,z) = -2yz^2 + f(z)$ $\Rightarrow \Phi = 3y^2x - 2yz^2 + f(z)$. Ekvationen $\Phi'_z = 3z^2 - 4yz$ slutligen ger $-4yz + f'(z) = 3z^2 - 4yz \Leftrightarrow f'(z) = 3z^2 \Leftrightarrow f(z) = z^3 + C$.

Svar: $a = 3$, $b = 2$ och $\Phi = 3y^2x - 2yz^2 + z^3 + C$.

---

(2) $\Gamma:\ \rho = 1 + \varphi,\ z = 1,\ \varphi: 0 \to 2\pi$

$$\bar{B}(x,y,z) = 2z\underbrace{(x\hat{x} + y\hat{y})}_{\rho\hat{\rho}} + \underbrace{(x^2+y^2)^2}_{\rho^2}\hat{z} = 2z\rho\hat{\rho} + \rho^4\hat{z}$$ i cylinderkoordinater.

$$\bar{B}\big|_\Gamma = 2\cdot 1\cdot(1+\varphi)\,\hat{\rho} + (1+\varphi)^4\hat{z},$$ och

$\Gamma:\ \bar{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = (1+\varphi)\hat{\rho} + \hat{z} \Rightarrow d\bar{r} = \hat{\rho}\,d\varphi + (1+\varphi)\,d\hat{\rho} = \hat{\rho}\,d\varphi + (1+\varphi)\,\hat{\varphi}\,d\varphi$

$\Rightarrow \bar{B}\cdot d\bar{r} = 2(1+\varphi)\,d\varphi$, alltså

$$\int_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{r} = \int_0^{2\pi} 2(1+\varphi)\,d\varphi = \Big[(1+\varphi)^2\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2 + 4\pi$$

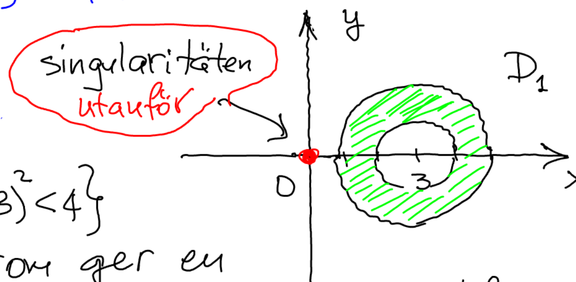
Svar: $4\pi^2 + 4\pi$

---

(3) (a) $A(x,y,z) = \dfrac{y\hat{x} - x\hat{y}}{x^2+y^2}$, $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 - 6x + 8 < 3\}$

Observera att D_1 ges av: $1 < x^2 + (y-3)^2 < 4$:

och $\bar{A}$ är $C^1(\mathbb{R}^3$ utan z-axeln$)$, alltså är $\bar{A} \in C^1(D_1)$, och även i ett större område $D = \{(x,y,z):\ x^2 + (y-3)^2 < 4\}$ som är enkelt sammanhängande. Dessutom ger en standard beräkning att $\nabla \times \bar{A} = 0$ i D $\Rightarrow$ $\bar{A}$ är ett potentialfält.



(b) $\bar{B}(\rho,\varphi,z) = \hat{\rho} + z\hat{z}$ ger att $\nabla \times \bar{B} = 0$ och $\bar{B}$ är regulär, dvs av klass C^1 i D_2. Observera dock att D_2 inte är enkelt sammanhängande.

För att undersöka närmare, sätter vi upp $\bar{B} = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\rho}\hat{\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$ i cylinderkoordinater, vilket ger

$$\begin{cases} \Phi'_\rho = 1 \\ \Phi'_\varphi = 0 \\ \Phi'_z = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Phi = \rho + \frac{z^2}{2} + C}$$

Observera att Φ är C^1 i D_2 eftersom $x^2+y^2=\rho^2>0$ i D_2. Men $\Phi \notin C^1(\mathbb{R}^3)$ eftersom $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ saknar partiella derivator i origo!

Alltså är $\bar{B}$ ett potentialfält i D_2

(c) $\bar{C}(x,y,z) = xyz\,\hat{x} + zx^2\hat{y} + x^2y\,\hat{z}$, $\nabla\times\bar{C} = (0; -xy; 2zxy - xz) \neq \bar{0}$

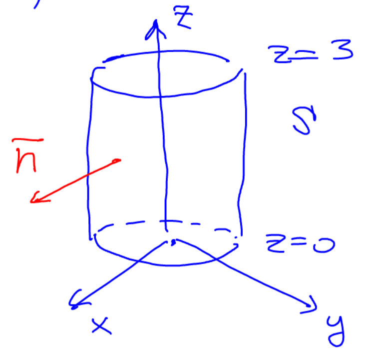
$\Rightarrow$ $\bar{C}$ är inte ett potentialfält (i D_3)

Svar: a) ja b) ja c) nej

---

(4) $\bar{F} = \frac{z}{(7+z^2+\rho^2)^{3/2}}\underbrace{(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})}_{\bar{r}} = \frac{z}{(7+z^2+\rho^2)^{3/2}}(\rho\hat{\rho}+z\hat{z})$ (i cylinderkoordinater)

$\rho = 3$



$$S: \begin{cases} \rho^2 = 9 \Leftrightarrow \rho = 3 \\ 0 \le z \le 3 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$ (ges i cylinderkoordinater)

Observera att S ges implicit m.h.a. $\rho = 3$, d.v.s. ρ-koordinatyta $\Rightarrow$ $d\bar{S} = h_\varphi h_z \hat{\rho}\, d\varphi\, dz$ ($\hat{\rho}$ pekar ut genom S)

$$\Rightarrow \iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} \frac{z}{(7+z^2+\rho^2)^{3/2}}(\rho\hat{\rho}+z\hat{z})\cdot\rho\cdot 1\cdot\hat{\rho}\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \frac{9z}{(16+z^2)^{3/2}}dz = 18\pi\int_0^3 \frac{z\,dz}{(\underbrace{16+z^2}_{t})^{3/2}} = 9\pi\int_{16}^{25}\frac{dt}{t^{3/2}} = 9\pi\left[\frac{-2}{\sqrt{t}}\right]_{16}^{25} = \frac{9\pi}{10}.$$

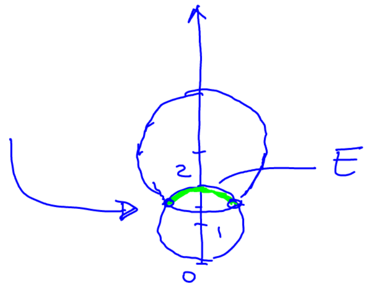
Svar: $\frac{9\pi}{10}$.

---

(5) $S_1 = \{(x,y,z): x^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$, $S_2 = \{(x,y,z): x^2+y^2+(z-3)^2 = 3\}$

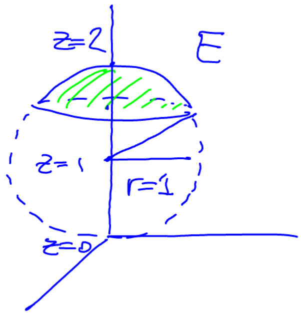
$S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z): 1-(z-1)^2 = 3-(z-3)^2 = x^2+y^2\}$

$1-(z-1)^2 = 3-(z-3)^2 \Leftrightarrow$ $z = \frac{3}{2}$ och $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$



Sfäriska "mössen" ges av

$$E = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1,\ \frac{3}{2} \le z \le 2\right\}$$



vilket ger i sfäriska koordinater
$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = 1+\cos\theta \end{cases}$$

Ecvationen $z = \frac{3}{2}$ ger

$$1+\cos\theta = \frac{3}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{3}$$

alltså: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, och E är koordinatytan av $r=1$, vilket ger

$$d\bar{S} = h_\varphi h_\theta \hat{r}\, d\varphi d\theta = r^2 \sin\theta\, \hat{r}\, d\varphi d\theta = \sin\theta\, \hat{r}\, d\varphi d\theta$$

$$\text{Area}(E) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} |d\bar{S}| = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin\theta \cdot d\varphi d\theta = 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi$$

Svar: Area $= \pi$

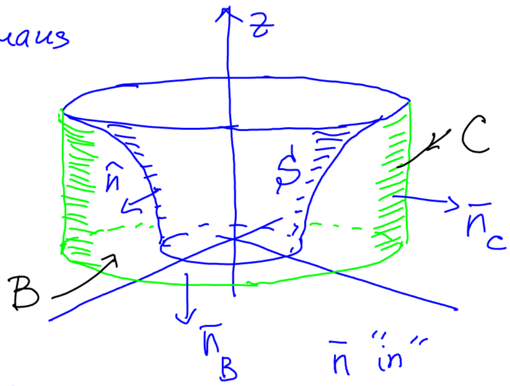
---

⑥ $\bar{A}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2}}(x\hat{x} + y\hat{y} - z\hat{z})$

$$\text{div}\,\bar{A} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2}}\text{div}(x,y,-z) - \frac{(x,2y,0)\cdot(x,y,-z)}{(x^2+2y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2}} - \frac{x^2+2y^2}{(\sqrt{x^2+2y^2})^3} = 0.$$

Observera att $\bar{A} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus z\text{-axeln})$, d.v.s. är singulär längs $x=y=0$.

Vi lägger till följande ytor: cylindern $C: x^2+2y^2 = 4$, $0 \le z \le \sqrt{2}$, och skivan $B: 2 \le x^2+2y^2 \le 4$. Dessa ytor (tillsammans med S) omsluter en kropp V inom vilken $\bar{A}$ är av klass C^1 och $\text{div}\,\bar{A} = 0$. Enligt Gauss sats



$$\iint_{B+C-S} A\cdot d\bar{S} = \iiint_V \text{div}\,\bar{A}\, dxdydz = 0$$

- Längs B: $\bar{n}_B = -\hat{z} \Rightarrow \bar{A}\cdot d\bar{S} = \frac{\overset{=0}{z}}{\sqrt{x^2+2y^2}}dxdy = 0$

- Parametrisera C med ortsvektorn $\bar{r}(\varphi,z) = 2\cos\varphi\,\hat{x} + \sqrt{2}\sin\varphi\cdot\hat{y} + z\hat{z}$ med $(\varphi,z)\in D$, där $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le \sqrt{2}$. Observera att vi då har

$$\bar{r}'_\varphi \times \bar{r}'_z = (-2\sin\varphi\cdot\hat{x} + \sqrt{2}\cos\varphi\cdot\hat{y}) \times (\hat{z}) = 2\sin\varphi\,\hat{y} + \sqrt{2}\cos\varphi\cdot\hat{x} = (\sqrt{2}\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0)$$

– pekar ut från z-axeln $\Rightarrow$

$$\iint_C \bar{A}\cdot d\bar{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4}}\cdot(2\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi, -z)\cdot(\sqrt{2}\cos\varphi, 2\sin\varphi; 0)\, d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}(2\sqrt{2})(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi dz = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2} = 4\pi$$

Svar: 4π