TATA44 Lösningsförslag för tentamen 28-08-2024.

Uppgift 1.

1. Ett område D är enkelt sammanhängande om varje sluten kuva i D kan kontinuerligt deformeras till en punkt i D utan att den lämnar området.
2. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ som kan skrivas som $\mathbf{F} = \nabla\Phi(\mathbf{x})$, där $\Phi(\mathbf{x})$ är en C^1-funktion.
3. Påståendet är **sant** eftersom $\mathbf{A} = \nabla\Phi(\mathbf{x})$ för någon C^1-funktion $\Phi(\mathbf{x})$, alltså

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{rot}\,\nabla\Phi = \nabla \times \nabla\Phi = \mathbf{0},$$

se formel 11 på formelbladet.

Uppgift 2. För Γ_1 väljer vi ortsvektorns $\mathbf{r}$ parametrisering

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 : &\quad \mathbf{r} = (2\cos t, 0, 2\sin t), \quad t : 0 \to \pi/2,\\
\Gamma_2 : &\quad \mathbf{r} = (0, t, 2-t), \quad t : 0 \to 2,\\
\Gamma_3 : &\quad \mathbf{r} = (t, 2-t, 0), \quad t : 0 \to 2,
\end{aligned}$$

alltså

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} (0, -4\sin t, 1) \bullet (-2\sin t, 0, 2\cos t)\, dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos t\, dt = 2,\\
\int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} &= \int_0^{2} (t, 2(2-t), 1) \bullet (0, 1, -1)\, dt = \int_0^{2} (2t-5) dt = -6,\\
\int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} &= \int_0^{2} (2-t, 0, 1) \bullet (-1, 1, 0)\, dt = \int_0^{2} (2-t) dt = 2,
\end{aligned}$$

vilket ger

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = -2.$$

Svar: -2

Uppgift 3. Ytan $2z = x^2 + y^2$ skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ då $z^2 + 2z = 3$ som ger $(z+1)^2 = 4$. Då är $z = -1 \pm 2$ och vi erhåller $z = 1$ eftersom $z \geqslant 0$. Parametrisera ytan $2z = x^2 + y^2$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho^2/2) = \rho\hat{\rho} + \dfrac{\rho^2}{2}\hat{z}$ (cylinderkoordinater) och vi har $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$. Observera att $\mathbf{r}'_\rho = \hat{\rho} + \rho\hat{z}$ och $\mathbf{r}'_\phi = \rho\hat{\phi}$ vilket ger

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} + \rho\hat{z}) \times (\rho\hat{\phi}) = -\rho^2\hat{\rho} + \rho\hat{z}.$$

Här har vi använt oss av följande kalkyl:

$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{\rho}}{d\rho} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} = \hat{\phi}.$$

Vidare utgör $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$ en högerorienterad ortonormerad bas vilket ger oss $\hat{\rho}\times\hat{\phi}=\hat{z}$, $\hat{\phi}\times\hat{z}=\hat{\rho}$, $\hat{z}\times\hat{\rho}=\hat{\phi}$. Låt D vara mängden $(\rho,\phi): 0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2},\ 0\leq\phi\leqslant 2\pi$. Ytans area är nu

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|\,d\rho\,d\phi = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\rho^4}\,d\phi\right)d\rho \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{2\pi}{3}\left[(1+\rho^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$

Uppgift 4. Ortsvektorn för ytan S är $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,x^2+y^2-1)$ där $(x,y)\in D:=\{(x,y): 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$. Vektorn $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=(-2x,-2y,1)$ är en normal till S. Ytterligare noterar vi att $\hat{\mathbf{z}}\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)=1>0$. Flödet av vektorfältet är

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A}\bullet\hat{\mathbf{n}}dS &= \iint_D \mathbf{A}\bullet(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)dxdy = \iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2},0\right)\bullet(-2x,-2y,1)\,dxdy \\ &= -2\iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} dxdy = -2\pi. \end{aligned}$$

Svar: -2π

Uppgift 5. Observera att vektorfältet $\mathbf{A}(x,y,z)=(4xy+z^2)\hat{\mathbf{x}}+ax^2\hat{\mathbf{y}}+(3z^2+bxz)\hat{\mathbf{z}}$ är av klass C^1 i **enkelt sammanhängande** området $\mathbb{R}^3$. Alltså blir $\mathbf{A}(x,y,z)$ ett potentialfält om och endast om $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$, med andra ord

$$\nabla\times\mathbf{A}=(0,\,(2-b)z,\,(2a-4)x)=\mathbf{0},$$

gäller i hela $\mathbb{R}^3$, vilket ger att $a=b=2$. Potentialen $\Phi(x,y,z)$ kan fås fram nu ur ekvationen $\nabla\Phi(x,y,z)=\mathbf{A}(x,y,z)=(4xy+z^2,2x^2,3z^2+2xz)$, d.v.s.

$$\Phi'_x=4xy+z^2,\quad \Phi'_y=2x^2,\quad \Phi'_z=3z^2+2xz.$$

Integrationen av $\Phi'_y=2x^2$ ger $\Phi(x,y,z)=2x^2y+f(x,z)$ och sedan $\Phi'_x=4xy+z^2$ ger $f'_x(x,z)=z^2$, alltså $f(x,z)=xz^2+g(z)$, och härmed $\Phi(x,y,z)=2x^2y+xz^2+g(z)$. Insättning i $\Phi'_z=3z^2+2xz$ ger $g'(z)=3z^2$, $g(z)=z^3+C$ där C är en godtycklig konstant. Detta ger att

$$\Phi(x,y,z)=2x^2y+xz^2+z^3+C$$

och integralen blir

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\Phi(0,1,2)-\Phi(0,0,0)$$

eftersom $\mathbf{A}$ är ett potenialfält med potentialen $\Phi(x,y,z)=2x^2y+xz^2+z^3+C$ och kurvintegralens värde oberoende av vilken kurva man går längs med. Detta ger

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=8-0=8.$$

Svar: 8

Uppgift 6. Parametrisera S genom ortsvektorn (i cylinder koordinater):

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + (1-\rho^2)\hat{z}$$

med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$. På S har vi (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + (1-\rho^2)\rho\,\hat{z}.$$

Observera att

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - 2\rho\hat{z}) \times (\rho\hat{\phi}) = 2\rho^2\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$$

och att $(\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi) \cdot \hat{n} = \rho \geqslant 0$. Observera att $\mathbf{A}$ är singulärt på z-axeln. Vi definierar $S_\varepsilon : z = 1-\rho^2,\ 0 < \varepsilon \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ och $D_\varepsilon : 0 < \varepsilon \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$. Flödet ut genom S är då

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS_\varepsilon$$

och vi har

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS_\varepsilon &= \iint_{D_\varepsilon} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi) d\rho d\phi \\
&= \iint_{D_\varepsilon} (\frac{1}{\rho}\hat{\rho} + (1-\rho^2)\rho\,\hat{z}) \cdot \big(2\rho^2\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}\big)\, d\rho d\phi \\
&= \iint_{D_\varepsilon} [2\rho + \rho^2 - \rho^4] d\rho d\phi \\
&= 2\pi \int_\varepsilon^1 [2\rho + \rho^2 - \rho^4] d\rho \\
&= \frac{34\pi}{15} - 2\pi\left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^5}{5}\right)
\end{aligned}$$

och nu följer att flödet är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{34\pi}{15}.$$

Svar: $\frac{34\pi}{15}$