Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA44
Modul: TEN1

Tentamen i TATA44 Vektoranalys

2024-08-28 kl. 8.00–12.00

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys* (se nästa sida). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar och information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida. Lycka till!

1. (a) Definiera vad som menas med att en område $D \subset \mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande.
   (b) Definiera vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F}$ är ett potentialfält.
   (c) Ange om påståendet ” *Om* $\mathbf{A}$ *är ett potentialfält så gäller att* $\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$” är sant eller falsk, motivera noga.

2. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = y\,\hat{x} - 2z\,\hat{y} + \hat{z}$ och Γ är kurvan $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ med

$$\begin{aligned}
\Gamma_1: &\quad y = 0,\ x^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0, x \geq 0 \text{ och } x: 2 \to 0 \\
\Gamma_2: &\quad x = 0,\ y + z = 2, \text{och } y: 0 \to 2 \\
\Gamma_3: &\quad z = 0,\ x + y = 2, \text{och } x: 0 \to 2
\end{aligned}$$

3. Beräkna den area av paraboloiden $2z = x^2 + y^2$ som ligger i klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

4. Beräkna flödet av vektorfältet
$$\mathbf{A} = \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{y}}$$
genom ytan $S: x^2 + y^2 = z + 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$ så att $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$, där $\hat{\mathbf{n}}$ är enhetsnormalen till S. Motivera noga.

5. För vilka konstanter a, b är vektorfältet $\mathbf{A} = (4xy + z^2)\hat{\mathbf{x}} + ax^2\hat{\mathbf{y}} + (3z^2 + bxz)\hat{\mathbf{z}}$ ett potentialfält i $\mathbb{R}^3$? Beräkna för dessa värden integralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är en godtycklig kurva med startpunkt i $(0, 0, 0)$ och ändpunkt i $(0, 1, 2)$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet
$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2}\hat{x} + \frac{y}{x^2+y^2}\hat{y} + z\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{z}$$
genom ytan $S: z = 1 - x^2 - y^2$ med $z \geqslant 0$ i riktning $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

Formelbladet i vektoranalys
Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av: $\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}$.

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi $\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$, och

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1,$$
$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}, \qquad \hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}, \qquad \hat{z} = \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi $\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}$ och

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta,$$
$$\hat{r} = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}, \qquad \hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$$
$$\hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.$$

Vektorformler

1. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$
2. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$
4. $\nabla\cdot(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla\cdot\mathbf{A} + \beta\nabla\cdot\mathbf{B}$
5. $\nabla\times(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla\times\mathbf{A} + \beta\nabla\times\mathbf{B}$
6. $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$
7. $\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi)\cdot\mathbf{A} + \Phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$
8. $\nabla\times(\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi)\times\mathbf{A} + \Phi(\nabla\times\mathbf{A})$
9. $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$
10. $\nabla\cdot(\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater
11. $\nabla\times(\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ
12. $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, deriverbara skalärfält Φ, Ψ och deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.