Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA44
Modul: TEN1

# Tentamen i TATA44 Vektoranalys

**2024-10-29 kl. 14.00–18.00**

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys* (se nästa sida). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar och information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida. Lycka till!

1. Beräkna area av den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som ligger innanför ellipsoiden $2x^2 + 2y^2 + (z+1)^2 = 6$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(x,y,z) = x^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z^2\hat{z}$ in genom sfären $S : x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$.

3. Beräkna kurvintegralen $\oint_\Gamma \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\right)\hat{x} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)\hat{y}$$

och $\Gamma$ är ellipsen $9x^2 + 4y^2 = 36$, $z = 0$, orienterad moturs.

4. Beräkna alla potentialer till vektorfältet $\mathbf{F}$ som ges i sfäriska koordinater av

$$\mathbf{F}(r,\theta,\phi) = 2r\cos\phi\sin 2\theta\,\hat{\mathbf{r}} + 2r\cos\phi\cos 2\theta\,\hat{\theta} - 2r\sin\phi\cos\theta\,\hat{\phi}$$

Beräkna sedan kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ där $\Gamma$ är skärningskurvan mellan planet $z = 0$ och ellipsoiden $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$ med $x, y \geq 0$, och med startpunkten i $(x,y,z) = (2,0,0)$.

5. (a) Transformera vektorfältet $\mathbf{A}(x,y,z) = (x+y)\hat{x} + (y-x)\hat{y} + z\hat{z}$ till sfäriska koordinater, d.v.s. skriv $\mathbf{A}$ på formen $\mathbf{A}(r,\theta,\phi) = A_1\hat{\mathbf{r}} + A_2\hat{\theta} + A_3\hat{\phi}$ där $A_i$ är funktioner av $r, \theta, \phi$.
1p

   (b) Bestäm sedan för vilka värden på konstanten $m$ uppfyller vektorfältet $\mathbf{B} = r^m\mathbf{A}$ ekvationen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$.
2p

6. (a) Beräkna $\operatorname{div}\mathbf{A}$ där

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\hat{x} + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\hat{y} + \frac{z}{(x^2+y^2)^2}\hat{z}.$$

1p

   (b) Beräkna sedan flödet av vektorfältet $\mathbf{A}$ genom ytan $S : z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ i riktning $\hat{\mathbf{n}} \bullet \hat{\mathbf{z}} > 0$. Motivera noga.

2p

**Formelbladet i vektoranalys**
**Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater**

Gradienten ges av: $\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}$.

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\bullet\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

**För cylinderkoordinater:** med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi $\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$, och

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1,$$
$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}, \qquad \hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}, \qquad \hat{z} = \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.$$

**För sfäriska koordinater:** med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi $\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}$ och

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta,$$
$$\hat{r} = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}, \qquad \hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$$
$$\hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.$$

## Vektorformler

1. $\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$
2. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$
4. $\nabla\bullet(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla\bullet\mathbf{A} + \beta\nabla\bullet\mathbf{B}$
5. $\nabla\times(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla\times\mathbf{A} + \beta\nabla\times\mathbf{B}$
6. $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$
7. $\nabla\bullet(\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi)\bullet\mathbf{A} + \Phi(\nabla\bullet\mathbf{A})$
8. $\nabla\times(\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi)\times\mathbf{A} + \Phi(\nabla\times\mathbf{A})$
9. $\nabla\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\bullet(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\bullet(\nabla\times\mathbf{B})$
10. $\nabla\bullet(\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater
11. $\nabla\times(\nabla\Phi) = 0$ för alla $\Phi$
12. $\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter $\alpha$, $\beta$, deriverbara skalärfält $\Phi$, $\Psi$ och deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.