Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA44
Modul: TEN1

Tentamen i TATA44 Vektoranalys

2025-01-08 kl. 08.00–12.00

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys* (se nästa sida). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar och information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida. Lycka till!

1. Bestäm konstanterna a och b sådana att vektorfältet $\mathbf{A} = ay^2\hat{x} + b(3xy - z^2)\hat{y} + (3z^2 - 4yz)\hat{z}$ har en potential och beräkna då alla potentialer till $\mathbf{A}$.

2. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{B} \bullet d\mathbf{r}$ där
$$\mathbf{B}(x, y, z) = 2zx\hat{x} + 2zy\hat{y} + (x^2 + y^2)^2\hat{z}$$
och Γ är kurvan $\rho = 1 + \phi$, $z = 1$, med $\phi : 0 \to 2\pi$.

3. Vilka av följande vektorfälten är potentialfält? (motivera noga!):
   (a) $\mathbf{A}(x, y, z) = \dfrac{y\hat{x} - x\hat{y}}{x^2 + y^2}$ i $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 - 6x + 8 < 3\}$;
   (b) $\mathbf{B}(\rho, \phi, z) = \hat{\rho} + z\hat{z}$ (cylinderkoordinater) i $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$;
   (c) $\mathbf{C}(x, y, z) = xyz\hat{x} + zx^2\hat{y} + x^2y\hat{z}$ i $D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z < 0\}$.

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{xz\hat{x} + yz\hat{y} + z^2\hat{z}}{(7 + x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ut genom cylinderytan S: $x^2 + y^2 = 9$, $0 \le z \le 3$.

5. Beräkna area av den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ som ligger innanför sfären $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 3$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet
$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}(x\hat{x} + y\hat{y} - z\hat{z})$$
ut genom ytan $x^2 + 2y^2 = z^2 + 2$, $0 \le z \le \sqrt{2}$.

Formelbladet i vektoranalys
Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av: $\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}$.

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi $\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$, och

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1,$$
$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}, \qquad \hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}, \qquad \hat{z} = \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi $\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}$ och

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta,$$
$$\hat{r} = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}, \qquad \hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$$
$$\hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.$$

Vektorformler

1. $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c}$
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$
4. $\nabla \bullet (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \bullet \mathbf{A} + \beta\nabla \bullet \mathbf{B}$
5. $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$
6. $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$
7. $\nabla \bullet (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \bullet \mathbf{A} + \Phi(\nabla \bullet \mathbf{A})$
8. $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$
9. $\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$
10. $\nabla \bullet (\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater
11. $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ
12. $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, deriverbara skalärfält Φ, Ψ och deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.