Lösningsförslag 2025/08/27, TATA44

1a) $\Gamma: \; r=2, \; \theta=\pi/4, \; \varphi=2t, \; t: 0\to\pi \qquad (*)$

Alternativ I.

$x = r\sin\theta\cos\varphi = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2t = \sqrt{2}\cos 2t$

$y = r\sin\theta\sin\varphi = \sqrt{2}\sin 2t$

$z = r\cos\theta = \sqrt{2}$

$|d\bar{r}|^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = (-2\sqrt{2}\sin 2t\,dt)^2 + (2\sqrt{2}\cos 2t\cdot dt)^2 + 0^2 = 8\,dt^2$

$L = \int_0^{\pi} \sqrt{8}\,dt = \pi\sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,\pi$

Alternativ II Sfäriska koordinater: $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 =$

$= /\text{via } (*) \text{ ovan}/ = 0 + 4\cdot 0 + 4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot(2dt)^2 = 8\,dt^2$, och sedan $L = 2\sqrt{2}\pi$

- Svar: $L = 2\sqrt{2}\,\pi$

1b) $\bar{A} = (x^2y,\, y^2z,\, z^2x)$, $\nabla\cdot\bar{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2x) = 2(xy+yz+zx)$

$$\nabla\times\bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix} = -y^2\hat{x} - z^2\hat{y} - x^2\hat{z}, \quad \nabla\times(\nabla\times\bar{A}) = 2z\hat{x} + 2x\hat{y} + 2y\hat{z}$$

- Svar: $\nabla\cdot\bar{A} = 2(xy+yz+zx)$, $\nabla\times(\nabla\times\bar{A}) = 2z\hat{x}+2x\hat{y}+2y\hat{z}$

---

2) $S = \{r=R\}$ i sfäriska koordinater, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$

Vi vet att ytelement $dS = h_\theta h_\varphi\cdot d\theta d\varphi = r\cdot r\sin\theta\cdot d\theta d\varphi$,

$$\iint_S z^2\,dS = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\cdot(\underbrace{r\cos\theta}_{z})^2\,d\varphi\right)d\theta = /\text{Obs. } r=R/ =$$

$$= R^4\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = \left/\begin{matrix} t=-\cos\theta \\ dt=\sin\theta\,d\theta\end{matrix}\right/ = 2\pi R^4\cdot\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

Svar: $\frac{4\pi R^4}{3}$. (Obs. att svaret måste vara positivt)

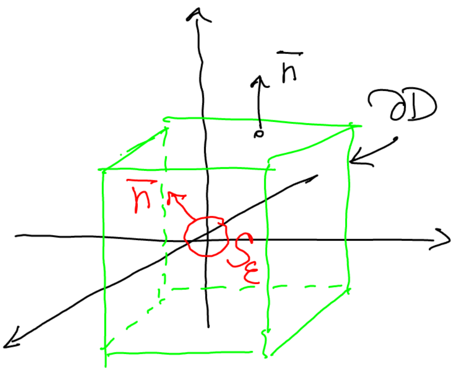
---

3) Notera att divergensen i sfäriska koordinater

$\bar{F} = \left(5+\frac{2}{r^3}\right)\bar{r} = \underbrace{\left(5r+\frac{2}{r^2}\right)}_{F_1}\hat{r}$, alltså $h_r=1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r\sin\theta$,

$$\nabla\cdot\bar F = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(5r+\frac{2}{r^2}\right)\cdot r^2\sin\theta\right)\right) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(15r^2\sin\theta\right) = 15$$

(för $r\neq 0$). Fältet $\bar F$ är av klass C^1 i $D\setminus\{\bar 0\}$, vilket ger via Gauss sats (se bilden)



$$\iint_{\partial D} \bar F\cdot d\bar S - \iint_{\partial B_\varepsilon} \bar F\cdot d\bar S = \iiint_{D\setminus B_\varepsilon}(\nabla\cdot\bar F)\,dV$$

där $B_\varepsilon=\{\bar r : |\bar r|<\varepsilon\}$, ∂B_ε orienterade med en yttre normal, alltså

- $$\iiint_{D\setminus B_\varepsilon} \nabla\cdot\bar F\,dV = 15\iiint_{D\setminus B_\varepsilon} dV = 15\,\mathrm{Vol}(D\setminus B_\varepsilon) = 15(\mathrm{Vol}\,D - \mathrm{Vol}\,B_\varepsilon) =$$
$$= 15\left(4^3 - \frac{4\pi}{3}\varepsilon^3\right) = 960 - 20\pi\varepsilon^3$$

- $$\iint_{\partial B_\varepsilon} \bar F\cdot d\bar S = \iint_{\partial B_\varepsilon}\left(5r+\frac{2}{r^2}\right)\hat r\cdot d\bar S = \Big/\ d\bar S = \hat r\cdot \underbrace{r^2}_{=\varepsilon^2}\sin\theta\cdot d\theta\, d\varphi,\quad r=\varepsilon\ \Big/ =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(5\cdot\varepsilon+\frac{2}{\varepsilon^2}\right)\cdot\varepsilon^2\sin\theta\, d\theta\right)d\varphi = (5\varepsilon^3+2)\cdot 2\pi\cdot 2 = 20\pi\varepsilon^3 + 8\pi$$

vilket ger: $$\iint_S \bar F\cdot d\bar S = 960 - 20\pi\varepsilon^3 + 20\pi\varepsilon^3 + 8\pi = 8\pi + 960.$$

Svar: $960 + 8\pi$

4 a) $\bar F = 2(x\hat x + y\hat y + z\hat z) + 3(y\hat x - x\hat y)$

Obs. att $\bar r = x\hat x + y\hat y + z\hat z = r\cdot\hat r$, och

$$y\hat x - x\hat y = r\sin\theta\sin\varphi\cdot\hat x - r\sin\theta\cos\varphi\cdot\hat y =$$
$$= r\sin\theta\underbrace{(\sin\varphi\,\hat x - \cos\varphi\,\hat y)}_{-\hat\varphi} = \big/\ \text{se formelbladet}\ \big/ = -r\sin\theta\cdot\hat\varphi$$

Vilket ger $\bar F = 2r\hat r - 3r\sin\theta\cdot\hat\varphi$, $F_1 = 2r$, $F_2 = -3r\sin\theta$, $F_3 = 0$

b) $\bar A = C r^p \bar F = C r^p(2r\hat r - 3r\cdot\sin\theta\cdot\hat\varphi) = 2Cr^{p+1}\hat r - 3Cr^{p+1}\sin\theta\cdot\hat\varphi$.

$$\nabla\cdot\bar A = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(2Cr^{p+1}\cdot r^2\sin\theta\right) + 0 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-3Cr^{p+1}\sin\theta\cdot r\right)}_{=0}\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(2Cr^{p+3}\sin\theta\right) = \frac{2(p+3)Cr^{p+2}}{r^2} = 2(p+3)Cr^p$$

Enligt uppgiften: $\nabla\cdot\bar{A} = r^2 \Rightarrow 2(p+3)Cr^p = r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $p=2$ och sedan $2(2+3)C = 1$, $C = \frac{1}{10}$.

Svar: $C = 1/10$, $p = 2$.

---

(5) Observera att $\bar{A}$ är av class C^1 i $\mathbb{R}^3\setminus\{0\} = D$ och området D är enkelt sammanhängande, alltså påståendet "$\bar{A}$ är ett potentialfält" är ekvivalent to "$\nabla\times\bar{A} = \bar{0}$". Vi beräknar rotation i sfäriska koordinater:

$$\nabla\times\bar{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ \frac{2-3\sin^2\theta}{r^4} & \frac{\sin 2\theta}{r^4}\cdot r & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(0\,;\,0\,;\,\frac{-3\sin 2\theta}{r^4} + \frac{6\sin\theta\cos\theta}{r^4}\right) = \bar{0}$$

$\Rightarrow$ $\bar{A}$ är ett potentialfält i D. För att beräkna potentialen ställer vi upp systemet $\nabla f = f'_r\hat{r} + \frac{1}{r}f'_\theta\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}f'_\varphi\hat{\varphi} = \bar{A}$ där $f(r,\theta,\varphi)$ är någon funktion av klass C^1 i D, alltså:

$$\begin{cases} f'_r = \frac{2-3\sin^2\theta}{r^4} & (1) \\ \frac{1}{r}f'_\theta = \frac{\sin 2\theta}{r^4} & (2) \\ f'_\varphi = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'_\varphi = 0$, med andra ord, $f = f(r,\theta)$,

och (2) ger $f = -\frac{\cos 2\theta}{2r^3} + g(r)$, insatt i (1) ger:

$$f'_r = \frac{3\cos 2\theta}{2r^4} + g'(r) = \frac{2-3\sin^2\theta}{r^4} \Rightarrow$$

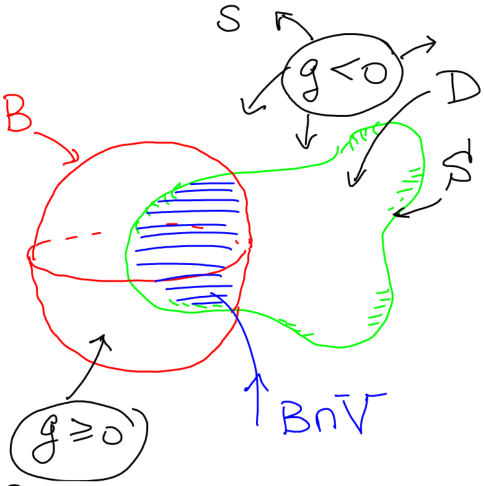
$$g'(r) = \frac{4-6\sin^2\theta-3\cos 2\theta}{2r^4} = \frac{4-6\sin^2\theta-3(1-2\sin^2\theta)}{2r^4} = \frac{1}{2r^4},$$

$$g(r) = C - \frac{1}{6r^3}, \quad \text{alltså}$$

$1+3-6\sin^2\theta$

Svar: $f(r,\theta,\varphi) = -\frac{\cos 2\theta}{2r^3} - \frac{1}{6r^3} + C = -\frac{2-3\sin^2\theta}{3r^3} + C$

⑥ Låt D vara den kropp som en sluten yta S begränsar, se biden. Observera att $\bar{F}$ är av klass C^1. Flödesintegral över en sluten yta S, $\oiint_S \bar{F}\cdot d\bar{S}$ fås med hjälp av Gauss sats:



$$\oiint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iiint_D (\nabla\cdot\bar{F})\,d\bar{V},$$

där
$$\nabla\cdot\bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x-x^3)+\frac{\partial}{\partial y}(4y-2y^3)+\frac{\partial}{\partial z}(6z-2z^3) =$$
$$= 12-3(x^2+2y^2+2z^2) \overset{\text{def}}{=} g(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \oiint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iiint_D \left(12-3(x^2+2y^2+2z^2)\right)dx\,dy\,dz = \iiint_D g(x,y,z)\,d\bar{V}.$$

Låt $B = \{\bar{r}\in\mathbb{R}^3 : g(\bar{r})\geq 0\} = \{\bar{r}\in\mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+2z^2\leq 4\}$, en ellipsoid.
Enligt definitionen gäller $g<0$ utanför B, alltså,

$$\iiint_D g\,dV = \underbrace{\iiint_{D\cap B} g\,d\bar{V}}_{\text{positiv}} + \underbrace{\iiint_{D\setminus B} g\,dV}_{\text{negativ}} \leq \iiint_{D\cap B} g\,d\bar{V} \leq \iiint_B g\,d\bar{V}$$

där sista "$\leq$" gäller eftersom $D\cap B\subset B$ och $g\geq 0$ i B.
Sammanfattningsvis fås:

$$I_S = \oiint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iiint_D g(x,y,z)\,d\bar{V} \leq \iiint_B g\,d\bar{V} = \iiint_B 3(4-x^2-2y^2-2z^2)\,dx\,dy\,dz = I$$

I modifierade sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta\sin\varphi$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\varphi$,
$1\leq r\leq 2$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq\theta\leq\pi$, $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot r^2\sin\theta$,

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^2 3(4-r^2)\cdot\tfrac{1}{2}r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\int_0^2 r^2(4-r^2)\,dr =$$
$$= 6\pi\cdot\left[\frac{4}{3}r^3-\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{6\pi\cdot 64}{15} = \frac{128\pi}{5}.$$

Detta visar att $I_S\leq\frac{128\pi}{5}$ gäller alltid, och ytterligare olikheten $I_S<\frac{128\pi}{5}$ gäller i fall om $D\setminus B\neq\emptyset$ eller $D\cap B\subsetneq B$, alltså:

Svar: Största värde $=128\pi/5$ och det antas exakt för $D=B$ eller $S=\partial B=\{\bar{r} : x^2+2y^2+2z^2=4\}$.