Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA44
Modul: TEN1

Tentamen i TATA44 Vektoranalys

2025-08-27 kl. 08.00–12.00

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys* (se nästa sida). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar och information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida. Lycka till!

1. (a) Beräkna båglängden av kurvan Γ som i sfäriska koordinater ges av $r = 2$, $\theta = \pi/4$ och $\phi = 2t$, $t : 0 \to \pi$. (1p)

   (b) Vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = x^2y\hat{x} + y^2z\hat{y} + z^2x\hat{z}$ är givet. Beräkna $\nabla \bullet \mathbf{A}$ och $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$. (2p)

2. Beräkna ytintegralen $\iint_S z^2\, dS$ där $S = \{(x; y; z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ är sfären av radien $R > 0$.

3. Låt $S = \partial D$ vara begränsingsytan till kuben
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : -2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2,\ -2 \le z \le 2\}.$$
Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(r, \theta, \phi) = 5\mathbf{r} + 2r^{-3}\mathbf{r}$ ut genom S.

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + 3y)\hat{x} + (2y - 3x)\hat{y} + 2z\hat{z}$.

   (a) Transformera $\mathbf{F}(x, y, z)$ till sfäriska koordinater, d.v.s. skriv $\mathbf{F}$ på formen
$$\mathbf{F}(r, \theta, \phi) = F_1\hat{\mathbf{r}} + F_2\hat{\theta} + F_3\hat{\phi}$$
där F_i är funktioner av r, θ, ϕ. (1p)

   (b) Bestäm sedan för vilka värden på reella konstanter p och C uppfyller vektorfältet $\mathbf{A} = Cr^p\mathbf{F}$ ekvationen $\nabla \bullet \mathbf{A} = r^2$ (där $r = |\mathbf{r}|$ och F definierad i 4(a) ovan). (2p)

5. Visa att vektorfältet
$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \frac{2 - 3\sin^2\theta}{r^4}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin 2\theta}{r^4}\hat{\theta},$$
har en skalär potential $f(r, \theta, \phi)$ i området $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : r > 0\}$. Beräkna $f(r, \theta, \phi)$. Motivera noga!

6. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - x^3)\hat{x} + (4y - 2y^3)\hat{y} + (6z - 2z^3)\hat{z}$. Beräkna det största (positiva) värdet som flödet $\oint\!\!\oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$ antar, då S är en sluten yta med utåtriktad normal. Ange också för vilken sluten yta S, som detta maximum antas.

--→ VÄND! Formelblad

Formelbladet i vektoranalys
Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av: $\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}$.

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi $\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$, och

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1,$$
$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}, \qquad \hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}, \qquad \hat{z} = \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi $\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, och

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta,$$
$$\hat{r} = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}, \qquad \hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$$
$$\hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.$$

Vektorformler

1. $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c}$
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$
4. $\nabla \bullet (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \bullet \mathbf{A} + \beta\nabla \bullet \mathbf{B}$
5. $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$
6. $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$
7. $\nabla \bullet (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \bullet \mathbf{A} + \Phi(\nabla \bullet \mathbf{A})$
8. $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$
9. $\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$
10. $\nabla \bullet (\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater
11. $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ
12. $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, deriverbara skalärfält Φ, Ψ och deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.