

Tentamen i TATA44 Vektoranalys

2025-10-28 kl. 14.00–18.00

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys* (se nästa sida). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 15 arbetsdagar och information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida. Lycka till!

- (a) Visa med hjälp av definitioner att $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ gäller för varje deriverbar vektorfält $\mathbf{A}(x, y, z)$ (1p)
(b) Beräkna båglängden av kurvan Γ som i cylinderkoordinater ges av $\mathbf{r} = \cos t \hat{\rho} + t\hat{\phi} + t\hat{z}$, $t : 0 \rightarrow \pi/2$. (1p)
(c) Bestäm för vilka värden på reella konstanten n uppfyller vektorfältet $\mathbf{A} = x^n \cdot \mathbf{r}$ ekvationen $\nabla \bullet \mathbf{A} = 0$ (där $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$). (1p)
- Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(\rho, \phi, z) = \rho\hat{\phi} + 2z\hat{z}$ (i cylinderkoordinater) genom ytan $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ orienterad med $\hat{\mathbf{n}} \bullet \hat{z} > 0$.
- Beräkna kurvintegralen $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = -(2+y)\hat{x} + (2+x)\hat{y} + (x+y)\hat{z}$ och Γ är skärningskurvan mellan planet $x - y + 2z = 2$ och paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Γ genomlöps moturs sett från $(0, 0, 100)$
- Bestäm en potential till vektorfältet (i sfäriska koordinater)

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \frac{2r \cos \phi}{(1 + r^2)^2} \hat{r} + \frac{\sin \phi}{r(1 + r^2) \sin \theta} \hat{\phi}.$$

Beräkna sedan kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är kurvan $r = t^2$, $\theta = \frac{\pi}{2}t$, $\phi = \frac{\pi}{4}$, $t : 1 \rightarrow 2$.

- Beräkna arean av den del av cylindern $x^2 + y^2 = 9$ som ligger innanför cylindern $x^2 + z^2 = 9$.
- Beräkna ytintegralen

$$\oiint_S r^{10} (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$$

där $\mathbf{F}(x, y, z) = -yz\hat{x} + xz\hat{y}$, $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ är Ortsvektorn, $r = |\mathbf{r}|$ och S är ytan av en enhetssfär med centrum i origo med utåtriktad normal.

--> VÄND! Formelblad

Formelbladet i vektoranalys
Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av: $\nabla\Phi(u, v, w) = \hat{u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial\Phi}{\partial w}$.

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u \hat{u} + A_v \hat{v} + A_w \hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (A_w h_u h_v) \right]$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u, v, w) = (\rho, \phi, z)$ har vi $\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$, och

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1,$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}, \quad \hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}, \quad \hat{z} = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.$$

För sfäriska koordinater: med $(u, v, w) = (r, \theta, \phi)$ har vi $\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \hat{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, och

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r \sin \theta,$$

$$\hat{r} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \quad \hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}.$$

Vektorformler

1. $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c}$
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$
4. $\nabla \bullet (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \bullet \mathbf{A} + \beta\nabla \bullet \mathbf{B}$
5. $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$
6. $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$
7. $\nabla \bullet (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \bullet \mathbf{A} + \Phi(\nabla \bullet \mathbf{A})$
8. $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$
9. $\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$
10. $\nabla \bullet (\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater
11. $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ
12. $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β , deriverbara skalärfält Φ, Ψ och deriverbara vektorfält $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.